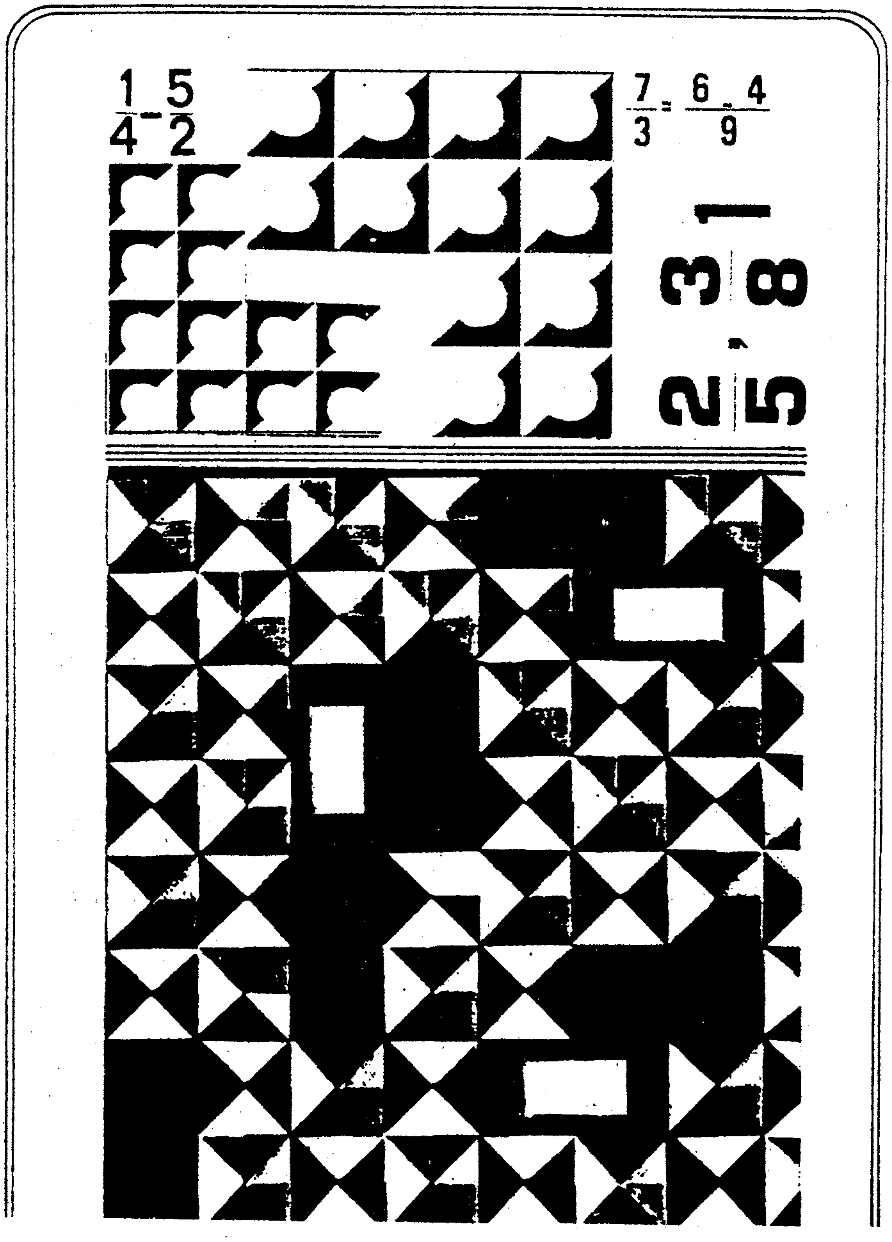
UNIVERSIDAD CATOLICA
Cardenal Raúl Silva Henríquez
Facultad de Educación y Humanidades

COMO APRENDER FRACCIONES COMUNES CON USO DE MATERIAL CONCRETO

PROFESOR JUAN FAUNDEZ F.



****

"COMO APRENDER FRACCIONES COMUNES CON USO DE MATERIAL CONCRETO"

CARRERA : PEDAGOGIA EN EDUCACION GENERAL BASICA.
ASIGNATURA : METODOLOGIA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA.
PROFESOR : **SR. JUAN FAUNDEZ F.**
FECHA : **Marzo de 1999.**

I N D I C E

PAG.

GUIA DE TRABAJO

PROF. JUAN FAUNDEZ F.

1. INTRODUCCION

Se sabe que en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se definen las opreaciones de adicción y de multiplicación. Además en $\mathbb{Z}$ se puede dar respuesta a las preguntas: ¿cuántos elementos menos se tiene?, ¿qué número sumado a 3 da cero?, ¿qué número sumado a 4 da 3?, etc. Todos estos problemas tienen solución mediante una sustracción, situaciones que en los números naturales y cardinales no tienen respuestas. Sin embargo, el conjunto de los números enteros es insuficiente para resolver problemas de medición. Por ejemplo, cuando se quiere señalar una parte de una unidad, o una parte de un conjunto finito discreto, no existe el número entero que lo represente claramente.

Los pueblos antiguos conocían las fracciones, pero en forma muy especial. Se sabe que los babilonios utilizaban fracciones cuyo denominador era 60. Los romanos usaban fracciones con denominador 12. A los egipcios, en cambio, no les preocupaba cual era el denominador, pero intuían que el numerador debía ser 1. Por ejemplo, en vez de $\frac{3}{4}$ escribían $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ que es igual a $\frac{3}{4}$. La única excepción aceptada por ellos era $\frac{2}{3}$. (En el papiro de Rhin se encuentran diversas explicaciones y ejemplos de ese tipo; siglo 17 A.C.).

Los griegos fueron quienes mejor desarrollaron las fracciones y los números racionales; conocieron la propiedad de orden, de densidad y definieron las operaciones conocidas hasta hoy. Sin embargo, para que los números racionales lograsen una estructura formal fue necesario que transcurriesen siglos.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES PSICOLOGICAS EN TORNO AL CONCEPTO DE FRACCION COMUN.

Jean Piaget postula que los conceptos matemáticos sólo se construyen en la mente del niño en forma operativa, a través de las acciones directas sobre elementos concretos efectuando transformaciones sobre cosas. De los mecanismos de acción se abstrae el concepto de número fraccionario; aunque es necesario puntualizar, que la experiencia física no es equivalente a la expresión matemática pura, sino que la primera es sólo un medio para lograr el concepto.

El planteamiento de Piaget, se fundamenta en el hecho que, históricamente las fracciones fueron abstraídas de expresiones del mundo físico, de la contemplación de conjuntos discretos de objetos y de regiones geométricas. Es por ello natural que para el estudio de las fracciones, el niño puede emplear modelos concretos.

Las investigaciones realizadas en la Escuela de Ginebra sobre el origen del número fraccionario, afirman que el concepto de fracción se descubre simultáneamente en el campo de los conjuntos contínuos y discontínuos y que no hay precedencia de uno sobre otro.

A nivel de las operaciones concretas, una unidad sigue siendo relativa a la realidad enumerada o medida de un conjunto, de tal modo que, en presencia de algunas fichas, puede considerarse como unidad al conjunto completo de ellas o, a una ficha individual.

(Extractado del libro: ¿Cómo aprenden matemáticas los niños? Marta Riveros y Pierina Zanocco).

3. PRESENTACION DEL MATERIAL CONCRETO.

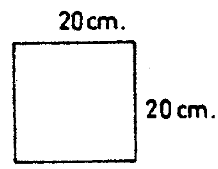
En la enseñanza de fracciones a niños de 3er. ó 4to. año de Educación General Básica es conveniente emplear un conjunto de material concreto, cuya unidad puede ser: un cuadrado de 20 x 20 cm., o un círculo de 20 cm. de díametro, o también un conjunto de elementos discontínuos; por ejemplo porotos o tarjetas.

El conjunto de fracciones, cuya unidad es un cuadrado de 20 x 20 cm. está formado por catorce regiones, trece de ellas subdivididas en partes congruentes. Este set puede ser elaborado en cartón piedra, en madera cholgüan, o en terciado de 4 mm. de espesor. Sus regiones están pintadas por un lado con diferentes colores y por el reverso, todas son de color blanco.

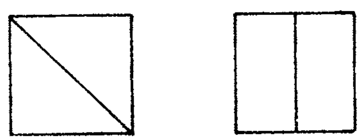
Las regiones que forman el set son las siguientes:

Una región que representa a la unidad = 1

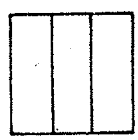
Es de color crema.



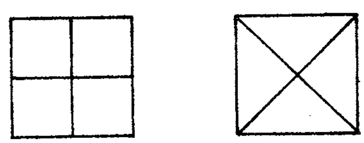
Dos regiones divididas en dos subregiones congruentes. Cada subregión representa un medio de la unidad. Todas son de color amarillo.



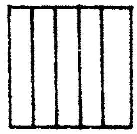
Una región dividida en tres subregiones congruentes. Cada subregión representa un tercio de la unidad. Tiene color verde claro.



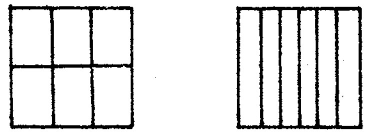
Dos regiones y cada una dividida en 4 subregiones congruentes.
Cada subregión representa un cuarto de la unidad. Todas son de color anaranjado.



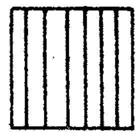
Una región dividida en cinco subregiones congruentes. Cada subregión representa un quinto de la unidad. Su color es azul.



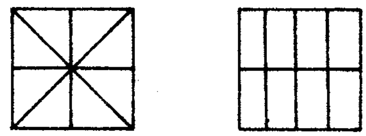
Dos regiones divididas cada una en seis subregiones congruentes. Cada subregión representa un sexto de la unidad, y todas son de color verde.



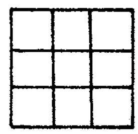
Una región dividida en siete subregiones congruentes. Cada subregión representa un séptimo de la unidad. Su color es café.



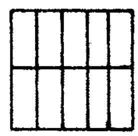
Dos regiones divididas cada una en ocho subregiones congruentes. Cada subregión representa un octavo de la unidad. Todas son de color rojo.



Una región dividida en nueve subregiones congruentes. Cada subregión representa un noveno de la unidad. Su color es verde oscuro.



Una región dividida en diez subregiones congruentes. Cada subregión representa un décimo de la unidad. Su color es celeste.



4. CONCEPTO DE FRACCION COMUN.

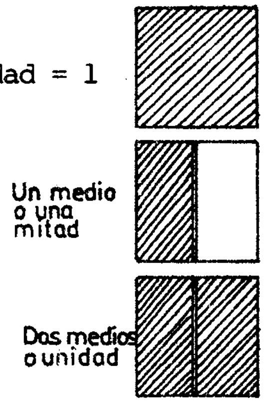
En la enseñanza de las fracciones debemos en primer lugar, solicitar al alumno que elabore un set de fracciones concretas; o le facilitamos un set de fracciones del colegio.

Luego, le pedimos que manipule el material para que se familiarice con él, que conozca las formas y colores de las regiones fraccionarias concretas.

a) Concepto de un medio.

Se muestra el cuadrado unidad (color crema) y se dice que él representa a 1.

Unidad = 1



A continuación se coloca sobre la unidad una subregión de un medio, (color amarillo) y se dice que ella representa la mitad de la unidad o un medio, porque la unidad está formada por dos medios, como se aprecia con el material concreto. (Ver diagrama).

Al comparar una mitad con las dos partes en que se divide el cuadrado unidad, se está relacionando 1 con 2. Esta relación se escribirá con un numeral formado por dichos números separados por un segmento horizontal, donde el número que represnta a una mitad se escribe sobre el segmento y el número que representa las dos partes en que se divide el cuadrado unidad se escribe bajo del segmento.

Luego; una mitad = un medio = $\frac{1}{2}$

(1: representa a una mitad o un medio de la unidad.)

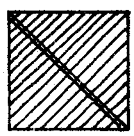
(2: representa a las dos partes en que se dividió la unidad.)

Para que el alumno internalice el concepto de esa fracción se repite el proceso con otro tipo de medios. Por ejemplo:

Un medio = $\frac{1}{2}$

Dos medios = $\frac{2}{2}$

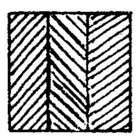
o unidad = 1

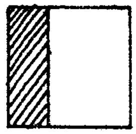


Al colocar los dos medios sobre la unidad se aprecia que 1 es equivalente a $\frac{2}{2}$

b) <u>Concepto de un tercio.</u>

Se muestra la unidad y sobre ella se colocan las tres regiones de un tercio, y se pregunta al alumno. ¿Qué parte de la unidad representa cada subregión?





Probablemente su respuesta será "una tercera parte de la unidad". Debemos decirle que efectivamente, es una tercera parte, o un tercio de la unidad.

En este caso estamos comparando 1 con 3 y, en consecuencia, la fracción un tercio se representa por el numeral $\frac{1}{3}$

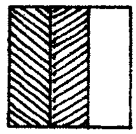
(representa a un tercio de la unidad.)

Es decir: un tercio = $\frac{1}{3}$

(representa las tres partes en que se dividió la unidad.)

¿Cuál será el numeral que representa a dos regiones tercios?

Por ejemplo, ¿éste?



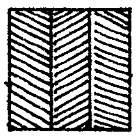
La respuesta es dos tercios, porque:

(dos tercios considerados de la unidad.)

$$2 \text{ veces } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

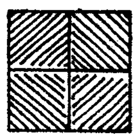
(tres partes en que se dividió la unidad.)

Al colocar los tres tercios sobre la unidad se aprecia que la cubren totalmente, lo cual significa que 1 es equivalente a $\frac{3}{3}$



c) <u>Concepto de un cuarto.</u>

Se continúa presentando la unidad y sobre ella la región un cuarto, dos regiones cuarto, tres regiones cuarto y cuatro regiones cuarto, con las preguntas respectivas ¿qué representa cada una de ellas?. A esta altura del procedimiento, el alumno ya ha comprendido que: una región cuarto se representa por $\frac{1}{4}$, dos regiones cuarto por $\frac{2}{4}$, tres regiones cuarto por $\frac{3}{4}$ etc. y nuevamente, nos encontramos que 1 es equivalente a $\frac{4}{4}$



Es conveniente efectuar el proceso inverso para reafirmar el aprendizaje de un concepto. Es decir, damos un numeral y pedimos al alumno que muestre las regiones que representan a dicho numeral. Por ejemplo:

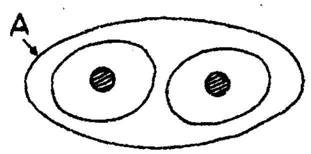
Dado el numeral $\frac{5}{7}$ ¿qué regiones lo representan?

¿y al numeral $\frac{3}{5}$?, ¿y a $\frac{6}{8}$?, etc.

d) Concepto de fracción en conjuntos discretos.

Como una forma de estar seguro que el alumno ha comprendido el concepto de fracción se plantean actividades apoyadas en conjuntos discretos de objetos. Para ello podemos utilizar porotos, u otro tipo de elementos, y trozos de lanas o cuerdas.

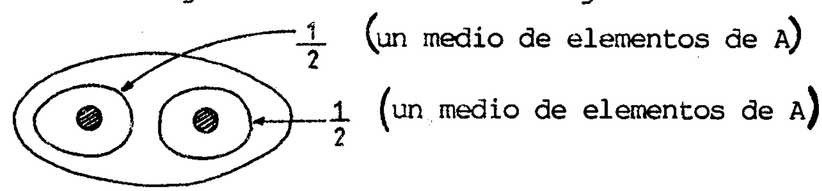
Primero se invita al alumno a formar un conjunto con dos porotos (ver diagrama) y a continuación separarlo en dos subconjuntos con igual número de elementos. (subconjuntos equipotentes).



Luego, se pregunta al alumno, ¿cuántos subconjuntos con un elemento existen?. El dirá que 2 ¿Qué representa cada subconjunto con respecto al conjunto completo A?

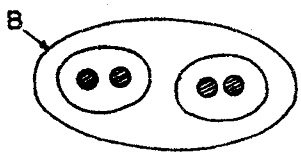
Si el alumno, con el set de tarjetas comprendió el concepto de fracción, responderá que cada subconjunto es un medio del conjunto A.

Es decir: A →



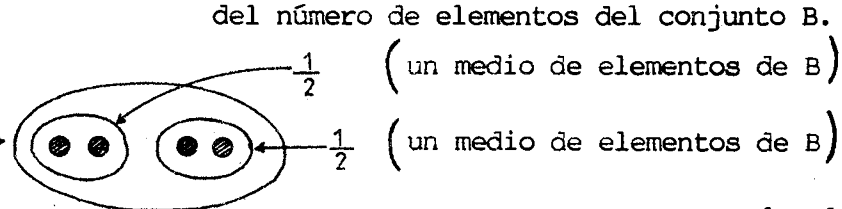
Luego: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$

En un segundo ejemplo se pide al estudiante que forme un conjunto con cuatro porotos y los divida en dos subconjuntos con igual número de elementos. (Ver diagrama)



A continuación se hace la misma pregunta anterior. ¿Qué representa cada subconjunto con respecto a los elementos del conjunto B?. Su respuesta debería ser, la mitad, o un medio del número de elementos del conjunto B.

Es decir: B →

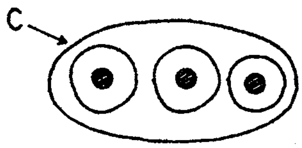


Luego: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$

De la misma manera se puede continuar formando conjuntos que tengan 6, 8, 10 ó más porotos (Nº par) y se pide al alumno que los divida en dos subconjuntos equipotentes con el objeto de afianzar el concepto de un medio.

Ahora, debemos revisar el concepto de un tercio con conjuntos discretos de elementos.

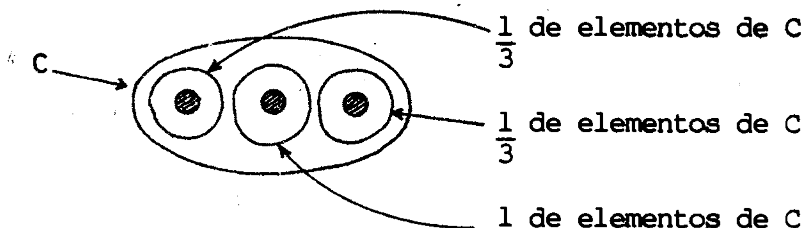
Se invita al alumno a formar un conjunto C, con tres porotos y que los divida en tres subconjuntos con un elemento cada uno. (Ver diagrama)



Preguntamos al alumno ¿Qué significa, o qué representa, cada subconjunto con respecto al conjunto C?

La respuesta debe ser un tercio de los elementos de C.

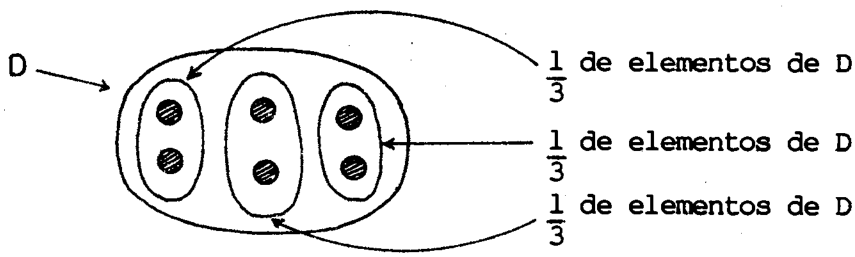
Es decir:



Luego: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$

Un segundo ejemplo de este tipo, será proponer al alumno que forme un conjunto D con seis porotos y los divida en tres subconjuntos con igual número de elementos cada uno. (Ver diagrama)

Es decir:



Luego: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$

De esta forma se continùa con ejemplos de conjuntos discretos que representan fracciones del tipo: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc.

Todas las fracciones estudiadas; y otras que aún no se han visto, se llaman fracciones comunes, cuyo símbolo es F.

e) <u>Términos de la fracción.</u>

Sabemos que los numerales: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{1}{2}$ etc. son fracciones comunes. El número que está debajo del segmento recibe el nombre de Denominador, y tal como se dijo anteriormente, este número indica o denomina las partes congruentes en que se ha dividido la unidad, o el número de subconjuntos equipotentes en que se ha dividido el conjunto.

Por su parte, el número que está sobre el segmento se llama Numerador, e indica el número de partes, o el número de subconjuntos considerados en la fracción.

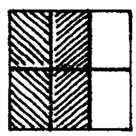
Por ejemplo, en la fracción $\begin{array}{l} 3 \xleftarrow{\hspace{3em}} \text{numerador} \\ \hline 4 \xleftarrow{\hspace{3em}} \text{denominador} \end{array}$

Una característica de las fracciones es que el denominador es un número natural y, por lo tanto, no puede ser cero, pues, carece de sentido tener una unidad dividida en cero partes o un conjunto dividido en cero subconjuntos equipotentes. Además, la división por cero no está definida. En cambio, el numerador es un número cardinal, lo cual indica que puede ser cero.

Ahora se proponen algunas preguntas para el alumno:

1. En la fracción $\frac{5}{8}$:
   a) ¿Qué nombre recibe el numeral 8?
   b) ¿Qué indica el numeral 5?
   c) Si un conjunto tiene 16 porotos ¿cuántos porotos representa la fracción $\frac{5}{8}$?

2. Se muestra la fracción concreta del diagrama y se pide al alumno que escriba en su cuaderno:
   a) el numeral de la fracción mostrada.
   b) el significado del denominador de la fracción escrita por él.
   c) el nombre del numeral que está sobre el segmento de la fracción anterior.

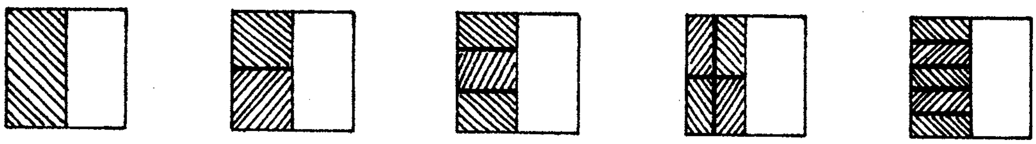


El profesor podrá proponer otros ejemplos similares con fraccciones concretas.

5. FRACCIONES EQUIVALENTES.

Usando fracciones concretas de regiones geométricas, se pide al alumno que coloque sobre el cuadrado unidad las dos fracciones $\frac{1}{2}$; es decir: $\frac{2}{2}$, después $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, etc. y el alumno comprobará que todas cubren exactamente a la unidad y, por lo tanto, dirá que ellas son iguales. El profesor podrá corregir la palabra igual, diciendo que esas fracciones son equivalentes y que todas representan a la unidad 1.

Estas fracciones equivalentes se pueden simbolizar de la siguiente manera: $1 \leftrightarrow \frac{2}{2} \leftrightarrow \frac{3}{3} \leftrightarrow \frac{4}{4} \leftrightarrow \ldots$ y dirá: 1 es equivalente a $\frac{2}{2}$, es equivalente a $\frac{3}{3}$, es equivalente $\frac{4}{4}$, etc. En un segundo ejemplo, se pide al alumno que coloque sobre la fracción concreta $\frac{1}{2}$ la fracción $\frac{2}{4}$; después $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ y $\frac{5}{10}$. (Ver diagramas).



y nuevamente, él comprobará que todas cubren exactamente a $\frac{1}{2}$ y, en consecuencia, dirá que ellas son equivalentes.

Luego, se escribirá en la pizarra $\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{2}{4} \leftrightarrow \frac{3}{6} \leftrightarrow \frac{4}{8} \leftrightarrow \frac{5}{10} \leftrightarrow \ldots$

Ahora se pregunta al alumno ¿qué representa 2 de 4 en la fracción $\frac{2}{4}$?, y ¿3 de 6 en $\frac{3}{6}$?

La respuesta debiera ser; que 2 de 4 es un medio y que 3 de 6 también es un medio.

Las mismas preguntas se pueden hacer con respecto a las fracciones $\frac{4}{8}$ y $\frac{5}{10}$ y el alumno llegará a la conclusión que todos representan a la fracción $\frac{1}{2}$.

En un tercer ejemplo, se pide al estudiante que encuentre las regiones concretas con las cuales pueda cubrir exactamente a la fracción $\frac{1}{3}$ y, al igual que en el caso anterior, comprobará que $\frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{2}{6} \leftrightarrow \frac{3}{9} \leftrightarrow \ldots$

Por último se pregunta nuevamente; ¿qué representa 2 de 6 en la fracción $\frac{2}{6}$?, y ¿3 de 9 en $\frac{3}{9}$?

La respuesta, al igual que en el caso anterior, tendría que ser: 2 de 6 representa a $\frac{1}{3}$ y también 3 de 9 representa a $\frac{1}{3}$, porque 2 es la tercera parte de 6 y 3 también es la tercera parte de 9.

a) Amplificación y simplificación de fracciones.

Comparemos la fracción $\frac{1}{2}$ con $\frac{3}{6}$, ¿cuántas veces mayor es el numerador 3 del numerador 1?

La respuesta del alumno debería ser 3 veces. Ahora ¿Cuántas veces mayor es el denominador 6 del dominador 2?. También la respuesta debería ser 3 veces. Entonces, le diremos: si tú tienes la fracción $\frac{1}{2}$, ¿qué puedes hacer para transformarla en $\frac{3}{6}$ que es equivalente a $\frac{1}{2}$?

Si el alumno ha comprendido el proceso, no hay duda que esta vez responderá diciendo: multiplico 1 por 3 y 2 por 3.

Es decir: $\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} \leftrightarrow \frac{3}{6}$

Para comprobar que, efectivamente $\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{3}{6}$ se pide al estudiante que coloque sobre la fracción concreta $\frac{1}{2}$, la fracción $\frac{3}{6}$.

A continuación le pedimos que exprese $\frac{1}{2}$ en $\frac{5}{10}$ y el alumno tendría que escribir: $\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} \leftrightarrow \frac{5}{10}$

Otro ejemplo de este tipo puede ser; que exprese $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{9}$ y el alumno debería escribir: $\frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} \leftrightarrow \frac{3}{9}$

Después de todos éstos, y otros ejemplos, podemos decirle al estudiante, que este proceso de multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un mismo número natural, para expresarla en otra equivalente, se llama <u>amplificación</u>.

Luego le preguntamos.

¿En qué consiste la amplificación de una fracción? ¿Para qué sirve la amplificación?

Por último, y con el objeto de internalizar el concepto de amplificación, se pide al estudiante que amplifique $\frac{2}{3}$ y que encuentre cuatro fracciones equivalentes a ella.

Posteriormente, se plantea la siguiente pregunta. Si tú tienes la fracción $\frac{4}{8}$, ¿qué harías para transformarla en $\frac{1}{2}$ que es equivalente a ella?

Si el alumno se dió cuenta anteriormente, que para expresar $\frac{1}{2}$ en $\frac{4}{8}$ debía multiplicar, pués, ahora se pide el proceso inverso y, por lo tanto, tendrá que dividir 4 por 4 y 8 por 4.

Es decir: $\frac{4}{8} \leftrightarrow \frac{4:4}{8:4} \leftrightarrow \frac{1}{2}$

Otro ejemplo de este tipo puede ser; expresar: $\frac{5}{10}$ en $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{9}$ en $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{12}$ en $\frac{2}{3}$, etc.

A continuación de estos ejemplos, decimos al estudiante, que el proceso de dividir el numerador y denominador de una fracción por un mismo número natural, para convertirla en otra equivalente, se llama <u>simplificación.</u>

Luego, preguntamos:

¿En qué consiste la simplificaión de una fracción?

¿Para qué sirve la simplificación?

Por último, se pide al estudiante que simplifique $\frac{8}{12}$ y y que encuentre dos fracciones equivalentes a ella.

b) <u>Algoritmo para determinar fracciones equivalentes</u>

Si tenemos las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{6}{12}$; y no disponemos de material concreto que nos permita comparar físicamente si ellas son equivalentes o no, ¿qué operación se podrá realizar con los términos de las dos fracciones, cuyo resultado nos diga a ciencia cierta, que ambas fracciones son equivalentes? O, esta otra pregunta:

Si ambas fracciones son equivalentes, ¿cómo debiera ser el producto del numerador 1 por el denominador 12, con el producto del numerador 6 por el denominador 2?

Es probable que algún alumno dé la respuesta correcta, diciendo que esos productos deben ser iguales. Es decir: $1 \cdot 12 = 6 \cdot 2$

$$\begin{array}{ccc} 1 \cdot 12 & = & 6 \cdot 2 \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 12 & = & 12 \end{array}$$

Ahora damos el algoritmo.

Dos fracciones son equivalentes, si y sólo sí, al multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda fracción y el numerador de la segunda por el denominador de la primera fracción, los productos son iguales. (Algoritmo de los productos cruzados).

En símbolos: $\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{6}{12} \overset{\text{(si y sólo sí)}}{\Longleftrightarrow} 1 \cdot 12 = 6 \cdot 2$

$$\begin{array}{ccc} 1 \cdot 12 & = & 6 \cdot 2 \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 12 & = & 12 \end{array}$$

Ejemplos:

i) Verificar si: $\frac{3}{4}$ y $\frac{18}{24}$ son equivalentes

Solución: $\frac{3}{4} \longleftrightarrow \frac{18}{24} \Longleftrightarrow \underbrace{3 \cdot 24}_{72} = \underbrace{18 \cdot 4}_{72}$

Luego: son equivalentes.

ii) Verificar si: $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{9}$ son equivalentes.

Solución: $\frac{4}{5} \neq \frac{7}{9} \Longleftrightarrow \underbrace{4 \cdot 9}_{36} \neq \underbrace{7 \cdot 5}_{35}$

Estas fracciones no son equivalentes.

iii) Verificar si: $\frac{0}{1}$ y $\frac{0}{5}$ son equivalentes.

Solución: $\frac{0}{1} \longleftrightarrow \frac{0}{5} \Longleftrightarrow \underbrace{0 \cdot 5}_{0} = \underbrace{0 \cdot 1}_{0}$

Estas fracciones también son equivalentes.

El profesor puede dar otros ejemplos similares para que el alumno practique el algoritmo de los productos cruzados.

Por ejemplo: Verificar si las siguientes fracciones son equivalentes o distintas

i) $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$; ii) $\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{18}$; iii) $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$

c) Concepto de número **Racional**.

Hemos visto que mediante el proceso de amplificación y simplificación se obtienen fracciones equivalentes; pero las fracciones equivalentes a una fracción dada pueden ser infinitas (incontables) y ellas forman un conjunto, que es llamado, clase de equivalencia de fracciones.

Por ejemplo:

La clase de equivalencia de la fracción $\frac{1}{2}$ es el conjunto de fracciones $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ A su vez, la clase de equivalencia de la fracción $\frac{2}{3}$ es el conjunto de fracciones: $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12} \ldots\right\}$

Cada clase de equivalencia de fracciones, define un número racional, el que está representado por la fracción de términos menores, llamada fracción principal (la fracción de téminos menores es aquella que no puede simplificarse más).

El nombre de "número racional" viene de "razón", tomado en sentido matemático de cuociente.

Luego: Nº racional $\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots \right\}$

Nº racional $\frac{3}{4} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \ldots \right\}$

Nº racional $0 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \ldots \right\}$ = racional cero

Todos los números racionales que puedan encontrarse a partir de las clases de equivalencias de fracciones, corresponden a racionales pósitivos, salvo el racional cero que no tiene signo.

Los racionales positivos se simbolizan por $\mathbb{Q}^+$ y el racional cero por $\left\{ \frac{0}{1} \right\}$, los cuales se pueden unir.

Luego: $\mathbb{Q}^+ \cup \left\{ \frac{0}{1} \right\} = \mathbb{Q}_0^+$ = conjunto de racionales positivos incluyendo el cero

De acuerdo a lo estudiado anteriormente, se concluye que: $F \subset \mathbb{Q}_0^+$ ¿Por qué?

Ejercicios:

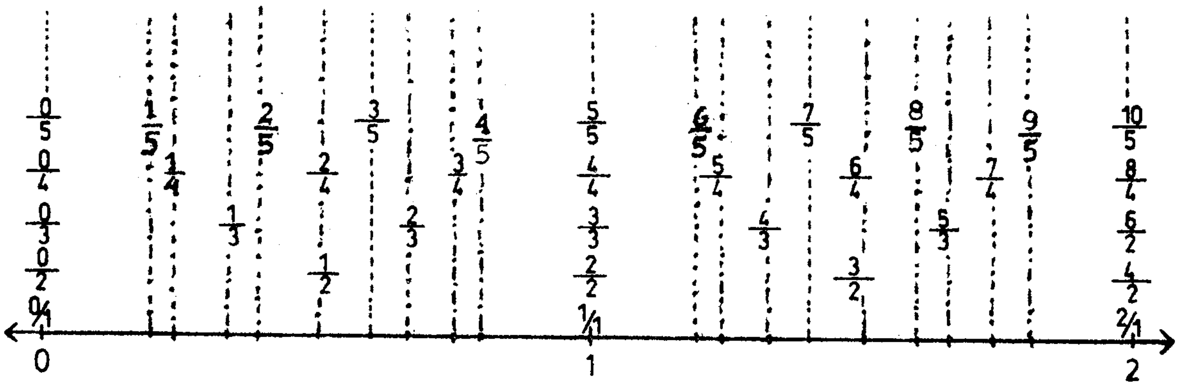
Determine los racionales de: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{2}$

6. REPRESENTACION DE FRACCIONES EN LA RECTA NUMERICA

Es probable que el alumno tenga experiencia de como representar en la recta numérica los números naturales y cardinales.

En este caso se dice al estudiante que elija en la recta dos unidades grandes (6 u 8 cm. en el cuaderno), los cuales serán subdivididos en segmentos, según sea la fracción que se quiera representar; tal como se indica en el ejemplo siguiente.

Es importante notar, que a todas las fracciones equivalentes representantes de un número racional, les corresponde un único punto en la recta numérica. Ver ejemplo .



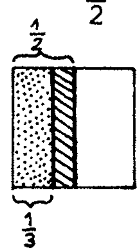
De esta manera se continúa hacia arriba representando nuevas fracciones, a las cuales les correponde un punto distinto en la recta y cada vez uno más cerca del otro.

7. ORDEN EN LAS FRACCIONES.

Vimos anteriormente, que al comparar dos fracciones podía ocurrir que ellas fueran congruentes o distintas.

Si las fracciones son distintas quiere decir que una es mayor o menor que la otra. Este hecho se puede comprobar con las fracciones concretas de regiones geométricas.

Solicitamos al estudiante que compare la fracción $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$. Ver diagrama.



Preguntamos al alumno, ¿Cómo son estas fracciones? Probablemente, dirá que $\frac{1}{2}$ es más grande que $\frac{1}{3}$

El profesor podrá corregir diciendo, que $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{3}$; en vez de decir más grande.

Cuando un número es mayor que otro, se usa el símbolo " $>$ " y se lee "mayor que."

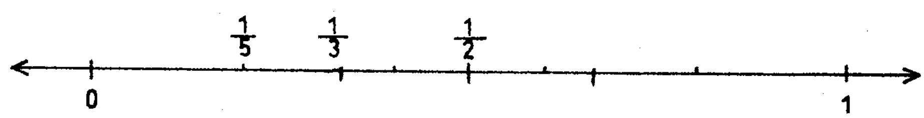
Luego: $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{3}$; o también: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Decir que $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{3}$ es equivalente a decir que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$. Esta relación se simboliza por " $<$ " y se lee "menor que".

Luego: $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$; o también: $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

En un segundo ejemplo se pide al alumno que compare la fracción concreta $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{5}$, colocando esta última sobre la primera, y comprobará que $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{5}$; es decir: $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$; o también puede decir, que $\frac{1}{5}$ es menor que $\frac{1}{3}$; esto es: $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

Con el objeto que el alumno comprenda correctamente el concepto de "mayor que", y de "menor que", lo invitamos a representar en la recta numérica las fracciones: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Ver dibujo.



En el dibujo se aprecia que $\frac{1}{2}$ se encuentra más alejado del cero, lo cual indica que esa fracción es mayor. A su vez, $\frac{1}{5}$ se encuentra más cerca del cero y, por lo tanto, esa fracción es menor.

Proponemos al estudiante un tercer ejemplo; que compare $\frac{2}{3}$ con $\frac{2}{5}$ y nuevamente él comprueba, con material concreto, que $\frac{2}{5}$ no cubre totalmente a $\frac{2}{3}$.

Luego, deduce que: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Con los ejemplos anteriores, y otros que pueden estar escritos en la pizarra, preguntamos al alumno. ¿Si dos fracciones tienen igual numerador y distinto denominador, ¿cuál es mayor?

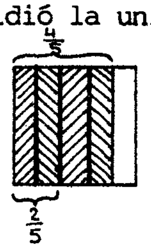
El estudiante debería deducir el algoritmo, diciendo.

Entre dos fracciones que tienen igual numerador y distinto denominador es mayor la que tiene menor denominador.

Veamos ahora, el caso de fracciones con distinto numerador e igual denominador.

Por Ejemplo: $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{5}$ ¿Cuál es mayor?

En este ejemplo, no hay duda que $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$ porque, en la fracción $\frac{4}{5}$ se han tomado cuatro partes de las cinco en que se dividió la unidad, en cambio, en la primera se han considerado sólo dos partes de las cinco. Este ejemplo, también se comprueba con material concreto de regiones geométricas. Ver diagramas. El alumno tendrá que concluir que $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$. En forma similar se pide que compare $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{7}$.



De los ejemplos anteriores se deduce que: Entre dos fracciones con distinto numerador e igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Haciendo uso de los conceptos: mayor y menor que (> y <) y aplicando los algoritmos respectivos se pueden ordenar fracciones. Por ejemplo:

a) <u>Orden de fracciones</u> con <u>igual numerador</u>.

i) $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \quad \ldots$

ii) $\ldots \frac{5}{6} < \frac{5}{5} < \frac{5}{4} < \frac{5}{3} < \frac{5}{2} < \frac{5}{1}$

iii) $\ldots \frac{3}{6} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4} < \frac{3}{3} < \frac{3}{2} < \frac{3}{1}$

Es recomendable pedir al estudiante que ordene otros ejemplos de fracciones.

b) <u>Orden de fracciones</u> con <u>igual denominador</u>.

i) $\frac{0}{5} < \frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{5}{5} < \frac{6}{5} < \cdots$

ii) $\frac{0}{3} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{3} < \frac{4}{3} < \frac{5}{3} < \cdots$

iii) $\ldots > \frac{6}{4} > \frac{5}{4} > \frac{4}{4} > \frac{3}{4} > \frac{2}{4} > \frac{1}{4} > \frac{0}{4}$

c) <u>Orden de fracciones con distinto numerador y denominador</u>.

Para esta forma de ordenar fracciones se hace uso del común denominador.

En primer lugar, veamos el caso donde un denominador de una fracción es múltiplo del otro denominador.

Sean las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{9}$

En estas fracciones observamos que 9 es múltiplo de 3, por lo tanto, para obtener las dos fracciones con denominador 9 se amplifica $\frac{2}{3}$ por 3 .

Es decir: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$

Ahora se puede comparar $\frac{6}{9}$ con $\frac{5}{9}$, donde se aprecia que $\frac{6}{9} > \frac{5}{9}$ porque tiene mayor numerador.

Reemplazando $\frac{6}{9}$ por la fracción $\frac{2}{3}$ se concluye que $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$.

Ejercicios: Determinar cual fracción es mayor en los ejercicios siguientes:

i) $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{4}$,   ii) $\frac{7}{6}$ y $\frac{4}{3}$,   iii) $\frac{3}{10}$ y $\frac{4}{5}$

Un segundo caso se refiere a fracciones con denominadores distintos y uno no es múltiplo del otro. Por ejemplo; entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ ¿cuál es mayor?.

En este ejemplo, el mínimo común múltiple de 5 y de 3 es 15. Entonces debemos amplificar convenientemente, ambas fracciones, para expresarlas en otras equivalentes que tengan denominador 15.

El procedimiento es el siguiente:

Se pide al alumno que amplifique sucesivamente $\frac{4}{5}$ por un número natural, para obtener un conjunto de fracciones que sean equivalentes a ella.

Por ejemplo; fracciones equivalentes a $\frac{4}{5} = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \ldots \right\}$

El mismo procedimiento se hace con $\frac{2}{3}$, hasta obtener una fracción equivalente a ella, pero que tenga un denominador igual al que tiene una de las fracciones del conjunto anterior.

Entonces, fracciones equivalentes a $\frac{2}{3} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15} \ldots \right\}$

Si observamos este ultimo conjunto de fracciones, vemos que la primera fracción que aparece con un denominador igual a un denominador del primer conjunto es $\frac{10}{15}$, y si ahora aplicamos el algorítmo deducido para fracciones con igual denominador se concluye que:

$$\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$$, porque $\frac{12}{15} \longleftrightarrow \frac{4}{5}$ y $\frac{10}{15} \longleftrightarrow \frac{2}{3}$

Pero, en el conjunto de fracciones equivalentes a $\frac{4}{5}$, el numerador 12 de la fracción $\frac{12}{15}$ se obtuvo, al multiplicar el numerador 4 de la fracción $\frac{4}{5}$ por 3, y este último 3 es el denominador de la fracción $\frac{2}{3}$. A su vez, en el segundo conjunto, el numerador 10 de la fracción $\frac{10}{15}$ se obtuvo multiplicando el numerador 2 de la fracción $\frac{2}{3}$ por 5 ; y este número 5 es el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$.

Además, el numerador 12 es mayor que el numerador 10. Por lo tanto, para saber cuando una fracción es mayor que otra que tiene distinto denominador, se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y el numerador de la segunda por el denominador de la primera fracción. Si el primer producto es mayor que el segundo , entonces, quiere decir que la primera fracción también es mayor, o viceversa. (Algorítmo de los productos cruzados).

Veamos su aplicación en el mismo ejemplo anterior. Se dan las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ y se quiere saber cuál es mayor.

Si $\underbrace{4 \cdot 3}_{12} > \underbrace{2 \cdot 5}_{10} \Rightarrow \frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

Realicemos un segundo ejemplo:

Comparar las fracciones $\frac{6}{7}$ y $\frac{3}{5}$

Solución: Si $\underbrace{6 \cdot 5}_{30} > \underbrace{3 \cdot 7}_{21} \Rightarrow \frac{6}{7} > \frac{3}{5}$

EJERCICIOS:

Dados los pares de fracciones siguientes; comprobar si son equivalentes o, si una es mayor que la otra.

i) $\frac{6}{7}$ y $\frac{3}{4}$; ii) $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{9}$; iii) $\frac{6}{5}$ y $\frac{4}{3}$

iv) $\frac{8}{9}$ y $\frac{16}{18}$; v) $\frac{12}{7}$ y $\frac{4}{3}$; vi) $\frac{7}{9}$ y $\frac{21}{27}$

CONCLUSION:

Con la relación de "menor" y "mayor que", (< y >) se establece un orden en el conjunto de las fracciones F. Además, con la relación de equivalencia ($\leftrightarrow$) es posible clasificar las fracciones en:

I) Propias, o menores que la unidad. Eje.: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; ...

II) Equivalentes a la unidad. Eje.: $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{7}{7}$; ...

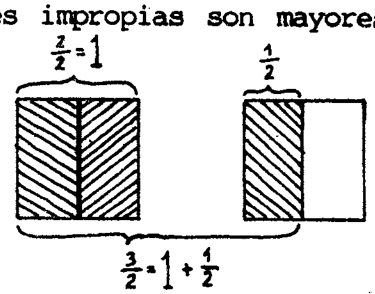
III) Impropias, o mayores que la unidad. Eje .: $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$; ...

7.1 FRACCIONES IMPROPIAS Y NUMEROS MIXTOS.

Hemos dicho anteriormente, que las fracciones impropias son mayores que la unidad.

Por ejemplo: $\frac{3}{2} > 1$

Esto se comprueba con el material concreto de regiones geométricas. Ver diagramas.



La expresión $1 + \frac{1}{2}$ se puede escribir $1\frac{1}{2}$ y se lee: un entero un medio.

Entonces: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Teòricamente, la igualdad anterior se demuestra de la siguiente manera:

$$\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Desarrollaremos en forma teórica la fracción $\frac{7}{3}$

Esto es: $\frac{7}{3} = \frac{3+3+1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + 1 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$

Se solicita a los alumnos que lo comprueben con el material concreto de regiones geométricas o mediante diagramas.

Los números $1\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{3}$, por estar formados por una parte entera y una parte fraccionaria, se llaman números mixtos.

En general; todo número que esté formado por una parte entera y otra fraccionaria recibe el nombre de mixto.

EJERCICIOS:

I En los siguientes ejemplos, señalar con una F o una M en el paréntesis, cuáles son fracciones impropias y cuáles números mixtos:

i) ( ) $\frac{11}{8}$; ii) ( ) $3\frac{1}{4}$; iii) ( ) $\frac{7}{2}$; iv) ( ) $\frac{5}{6}$

v) ( ) $5\frac{2}{3}$; vi) ( ) $0\frac{8}{4}$; vii) ( ) $\frac{8}{4}$; viii) ( ) $4\frac{3}{4}$

II Los ejemplos que sean fraciones impropias expresarlas en números mixtos.

forma de expresar una fracción impropia en número mixto es dividiendo el numerador por el denominador de la fracción.

Por ejemplo, la misma fracción anterior $\frac{7}{3} = 7 : 3$

Esta forma de escribir la fracción se llama razón.

Indica el número de tercios considerados

La expresión $7 : 3 = 2$ ← Indica el número entero formado con tercios de los 7 considerados. $2 = \frac{6}{3}$

1

Indica el número de partes en que se dividió la unidad.

Indica el número de tercios restantes que no están considerados en los dos enteros.

Luego: $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Expresar $\frac{17}{5}$ en número mixto. $17 : 5 = 3$. Luego: $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$

$\quad\;\; 2$

Aplicando este método, expresar en número mixto las siguientes fracciones impropias.

i) $\frac{26}{3}$; ii) $\frac{19}{8}$; iii) $\frac{22}{5}$; iv) $\frac{75}{10}$

v) $\frac{54}{7}$; vi) $\frac{50}{12}$; vii) $\frac{48}{30}$; viii) $\frac{84}{20}$

Cuando se tiene un número mixto ¿cómo expresarlo en fracción impropia?

Probablemente el alumno recuerde que

$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ pero $2 = \frac{6}{3}$ entonces:

$$2\frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

Otra forma de transformar un nùmero mixto en fracción impropia es multiplicando el denominador de la parte fraccionaria por el número entero, a cuyo producto se suma el numerador de la fracción, y como denominador se conserva el mismo denominador anterior.

Ejemplo: $2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$

Expresar en fracción impropia los números mixtos siguiente:

i) $3\frac{2}{3}$; ii) $5\frac{4}{6}$; iii) $8\frac{2}{3}$; iv) $1\frac{7}{9}$

8. DENSIDAD DE LAS FRACCIONES

Cuando representamos las fracciones en la recta numérica, vimos que la unidad se subdividía cada vez más, obteniendo nuevas fracciones y a las cuales les correspondería un punto en la recta.

También se observó que todas las fracciones equivalentes les correspondía un único punto en la recta. (Hacer una recta y representar fracciones equivalentes a ella). Estas observaciones permiten deducir que la distribución ordenada de fracciones , y de números racionales, es densa, porque entre dos fracciones diferentes existen otras (infinitas) y también diferentes.

Por ejemplo: entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ existe la fracción $\frac{5}{7}$; la cual comprueba el profesor con el material concreto de regiones geométricas. Pero, entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$ existe la fracción $\frac{7}{10}$, que también la comprueba con el material concreto.

En un tercer ejemplo, pedir al estudiante que ubique la fracción concreta que está comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$. La respuesta debiera ser la fracción concreta $\frac{4}{7}$.

Por último, como cuarto ejemplo, se podría solicitar la fracción concreta que está comprendida entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$. En este caso, la respuesta debiera ser la fracción $\frac{6}{8}$.

Una vez escritos en la pizarra los ejemplos anteriores, se invita al estudiante a observar las fracciones correspondientes a cada ejemplo y procurar que él descubra la relación que existe entre el numerador de la fracción intermedia encontrada, con los numeradores de las dos fracciones dadas. Este mismo análisis debe hacer el alumno con los denominadores.

El estudiante debería concluir que, tanto el numerador como el denominador de la fracción intermedia encontrada es igual a la suma de los numeradores y denominadores de las fracciones dadas, respectivamente.

Antes de aplicar el algorítmo anterior, el alumno debe saber cual de las fracciones dadas es mayor, para lo cual se aplica el procedimiento correspondiente.

Para el primer ejemplo de fracciones, el problema se plantearía de la siguiente manera:

Dadas las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Determinar una fracción que sea mayor que la fracción menor dada y que sea menor que la fracción mayor dada.

Pero, ¿cuál de las fracciones dadas, $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{4}$ es mayor?

Solución:

1º paso: Si $\begin{array}{ccccccc} 2 & \cdot & 4 & < & 3 & \cdot & 3 \\ & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\ & 8 & & < & & 9 & \end{array} \Longrightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

2º paso: La fracción intermedia entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ se encuentra con el algoritmo:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{3} & < & \frac{2+3}{3+4} & < & \frac{3}{4} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{2}{3} & < & \frac{5}{7} & < & \frac{3}{4} \end{array}$$

Para el tercer ejemplo anterior, la pregunta es similar: ¿Cuál de las fracciones dadas $\frac{1}{2}$ ó $\frac{3}{5}$ es mayor? Solución:

1º paso: $\begin{array}{ccccccc} 1 & \cdot & 5 & < & 3 & \cdot & 2 \\ & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\ & 5 & & < & & 6 & \end{array} \Longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

2º paso: La fracción intermedia entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ está dada por:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & < & \frac{1+3}{2+5} & < & \frac{3}{5} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{2} & < & \frac{4}{7} & < & \frac{3}{5} \end{array}$$

Para el cuarto ejemplo, se invita al alumno que encuentre la fracción intermedia entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$.

Después de estos ejemplos concretos y teóricos, y de otros que el profesor debe indicar; es conveniente hacer la siguiente pregunta al alumno.

En el conjunto de las fracciones ¿crees tú que existe la fracción **antecesor y sucesor** de una fracción dada? ¿Por ejemplo de $\frac{5}{7}$?

Si el alumno ha comprendido el concepto de densidad de las fracciones, su respuesta debería ser no. En todo caso, el profesor debe aclarar bién este concepto.

9. OPERACIONES EN EL CONJUNTO F.

9.1. ADICION DE FRACCIONES

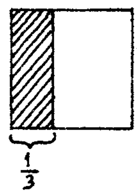
Es recomendable iniciar la adición con fracciones de igual denominador, para posteriormente completar el proceso con fracciones de distinto denominador.

a) Adición con igual denominador.

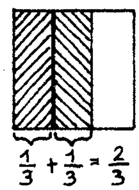
Se inicia la adición planteando un ejercicio sencillo que pueda ser realizado con el material concreto de regiones geométricas, u otro material.

Por ejemplo: sumar $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{}$?

Se coloca sobre la unidad concreta la fracción $\frac{1}{3}$. Ver diagrama.



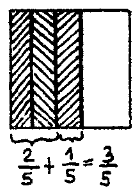
A continuación se coloca otra fracción $\frac{1}{3}$ y se observa sobre la unidad el resultado de $\frac{2}{3}$. Ver diagrama.



En un segundo ejemplo, se pide sumar $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \boxed{?}$

Se coloca sobre la unidad concreta la fracción $\frac{2}{5}$ y a continuación se agrega $\frac{1}{5}$ más.

La representación final y el resultado de la operación es el que se indica en la figura adjunta.



Se plantean al alumno las siguientes preguntas: ¿Qué relación existe entre el numerador de la fracción resultante $\frac{3}{5}$ y los numeradores de las fracciones sumandos? ¿Cómo es el denominador de la nueva fracción con respecto a los denominadores anteriores? De sus respuestas sale el Algoritmo. Para sumar dos; o más, fracciones con igual denominador se suman los numeradores y se conserva el denominador común.

Ahora se aplica el algoritmo en ejercicios diversos sin apoyo de material concreto.

EJERCICIOS:

i) $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$; ii) $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$

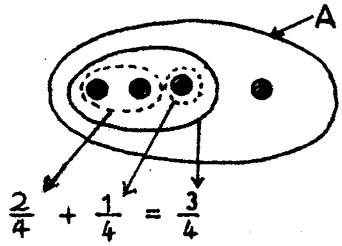
iii) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=$ ______ ; iv) $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=$ ______ ; v) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=$ ______

Los ejercicios anteriores pueden comprobarse con conjuntos discretos; por ejemplo, con porotos u otros elementos.

Para el ejercicios i), se pide al alumno que forme un conjunto A con 4 porotos y separe con lanas de colores distintos a la anterior; y dentro del conjunto A, dos subconjuntos: uno con dos porotos y el otro con uno. En seguida, que una los dos subconjuntos y cuente sus elementos.

Obtendrá un nuevo conjunto con tres elementos que representa el resultado de $\frac{3}{4}$

Ver diagrama.

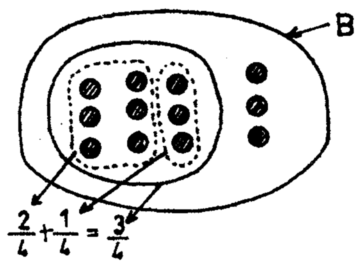


El mismo ejemplo (i), puede representarse también con un conjunto de 8 ó 12, o cualquier otro número de porotos que sea múltiplo de 4.

Por ejemplo, un conjunto B que tenga 12 porotos. Se invita al estudiante a separar con lanas de colores dentro del conjunto B, dos subconjuntos: uno que represente a $\frac{2}{4}$ (6 porotos) y el otro a $\frac{1}{4}$ (3 porotos).

Posteriormente, que una con otra lana de color diferentes los dos subconjuntos y cuente sus elementos. El resultado de 9 porotos representará a la fracción $\frac{3}{4}$

Ver diagrama:



El profesor pedirá a los alumnos que comprueben los ejemplos: ii, iii y iv.

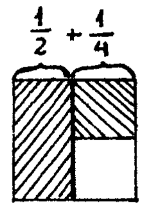
b) Adición con distinto denominador.

Es recomendable iniciar este tipo de adición con dos fracciones, tales que, el denominador de una sea múltiplo del denominador de la otra. Además, los ejemplos deben ser adecuados para presentar la adición con material concreto de regiones geométricas, o con otro material.

I) El denominador de una fracción es múltiplo del otro.

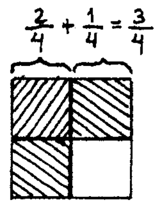
El método consiste en amplificar la fracción de denominador menor (o simplificar la fracción de denominador mayor, si es posible), para expresarla en una fracción equivalente de igual denominador al de la otra fracción. En seguida se procede a sumar fracciones con iguales denominadores.

Veamos el ejemplo siguiente: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{?}$



Se coloca sobre la unidad concreta la fracción $\frac{1}{2}$ (color amarillo) y a continuación se agrega $\frac{1}{4}$ (color anaranjado). La figura es la que se muestra a la derecha.

Pero, el profesor debe recordar al alumno que la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$, lo cual lo comprueba colocando sobre $\frac{1}{2}$ la fracción $\frac{2}{4}$



En este caso, la nueva figura indica que el resultado es la fracción $\frac{3}{4}$. (Ver diagrama).

Las actividades para la adición anterior con regiones geométricas, sugieren el proceso teórico de adición siguiente, donde $\frac{1}{2}$ es amplificado por 2.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

Un segundo ejemplo de este tipo es $\frac{4}{6} + \frac{1}{3} = \boxed{?}$

También puede apoyarse con regiones geométricas concretas; salvo que esta vez, es posible simplificar la fracción de denominador mayor 6 para igualar al denominador 3.

El proceso teórico es el siguiente.

$$\frac{4}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4 : 2}{6 : 2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

En el ejemplo anterior, también puede amplificarse $\frac{1}{3}$ por 2 para igualar los denominadores a 6 y se obtiene el mismo resultado.

Es decir: $\frac{4}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

II) <u>El denominador de una fracción no es múltiplo del otro.</u>

Se propone al estudiante un ejemplo simple como el siguiente:

i) Sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{?}$

Se pregunta al alumno; ¿Qué debemos hacer para transformar estas fracciones en otras equivalentes que tengan igual denominador?

El alumno, seguramente recordará el procedimiento seguido, en la relación de <u>menor</u> y <u>mayor</u> qué, y podrá decir; debemos amplificar ambas fracciones para transformarlas en otras equivalentes con igual denominador.

Procedimiento:

Fracciones equivalentes a $\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots \right\}$

Ahora se amplifica $\frac{1}{3}$ hasta obtener una fracción con denominador igual a alguna de las anteriores:

Fracciones equivales a $\frac{1}{3} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \ldots \right\}$

Las fracciones encerradas en círculo dentro de cada conjunto son equivalentes y tienen igual denominador.

Entonces: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

El ejemplo anterior, también se puede comprobar con el material concreto de regiones geométricas, para lo cual se reemplaza la fracción $\frac{1}{2}$ por la fracción concreta $\frac{3}{6}$ y la fracción $\frac{1}{3}$ por su equivalente $\frac{2}{6}$.

Un segundo ejemplo de este tipo puede ser.

ii) Sumar: $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \boxed{?}$

En este caso, el procedimiento es similar al anterior. Tenemos que amplificar ambas fracciones para expresarlas en otras equivalentes con igual denominador.

Procedimiento:

Fracciones equivalentes a $\frac{1}{4} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \ldots \right\}$

Fracciones equivalentes a $\frac{2}{3} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots \right\}$

Luego: $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3 + 8}{12} = \frac{11}{12}$

Este ejemplo no es posible comprobarlo con material de regiones geométricas, por no disponer de fracciones concretas de denominador 12.

Un tercer ejemplo apropiado para el estudiante puede ser el siguiente:

iii) Sumar: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \boxed{?}$

Procedimiento:

Fracciones equivalentes a $\frac{2}{3} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \ldots \right\}$

Fracciones equivalentes a $\frac{4}{5} = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \ldots \right\}$

Luego: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15} = \frac{15 + 7}{15} = \frac{15}{15} + \frac{7}{15} = 1 + \frac{7}{15} = 1\frac{7}{15}$

Después de estos tres ejemplos, y otros similares que pueda indicar el profesor, es posible obtener el algoritmo general para la adición de fracciones con distintos denominadores.

A manera de síntesis, se escriben en la pizarra los tres ejemplos anteriores, y se pide al alumno que observe las amplificaciones realizadas a las fracciones, mediante las cuales se transformaron en otras equivalentes con iguales denominadores.

Así, el primer ejemplo escrito en la pizarra es:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$

Preguntamos al alumno:

¿La fracción $\frac{1}{2}$ por cuánto se amplificó para transformarla en $\frac{3}{6}$? y a su vez; la fracción $\frac{1}{3}$ ¿por cuánto se amplificó para lograr $\frac{2}{6}$?

Sin duda, el alumno debería responder que $\frac{1}{2}$ se amplificó por 3 y $\frac{1}{3}$ por 2

Es decir, el ejemplo anterior se podría escribir así:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Antes de entregar el algoritmo general, es conveniente desarrollar otros ejercicios aplicando el mismo procedimiento.

El segundo ejemplo escrito en la pizarra es el siguiente:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$

Nuevamente, preguntamos al alumno. ¿Por cuánto se amplificó $\frac{1}{4}$, y por cuanto $\frac{2}{3}$, para transformar esas fracciones en $\frac{3}{12}$ y en $\frac{8}{12}$, respectivamente?.

La respuesta del alumno debería ser que, $\frac{1}{4}$ se amplificó por 3 y $\frac{2}{3}$ por 4; quedando ahora escrito el ejercicio así:

$$\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}_{\mathrm{I}}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 4}{\underbrace{4\cdot 3}_{\mathrm{II}}}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$

A esta altura del tratamiento de la materia, el estudiante ya ha comprendido el procedimiento empleado, sin embargo, el profesor puede enfatizar que; en el paso II, el numerador 1 se multiplicó por el denominador 3 de la segunda fracción y el numerador 2 se multiplicó por el denominador 4 de la primera. En cambio, el denominador común es el producto de los dos denominadores de las fracciones primeras dadas.

Teniendo en cuenta la explicación anterior se puede abreviar la escritura del ejemplo, pasando del paso I al paso II directamente.

Por ejemplo: $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 4}{4\cdot 3}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$

Como una forma de internalizar este proceso, se pide al estudiante que lo aplique directamente al ejemplo tres, que también está escrito en la pizarra. Es decir:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5} = \frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$$

Con estos ejemplos, y otros sugeridos por el profesor, se puede pedir al estudiante el algoritmo general de la adición de fracciones.

Algoritmo de la adición de fracciones.

Para sumar dos fracciones de distintos denominadores se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, a cuyo producto se suma la multiplicación del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera. El denominador común es el producto de los denominadores de las fracciones sumandos dadas.

Aplicar el algoritmo en la adición de los ejemplos siguientes:

i) $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=$ ___ ; ii) $\frac{5}{6}+\frac{4}{5}=$ ___ ; iii) $\frac{2}{3}+\frac{6}{\square}=\frac{\square}{21}$; iv) $\frac{3}{\square}+\frac{1}{5}=\frac{\square}{20}$

En la adición de fracciones, es recomendable observar si dichas fracciones son simplificables. Si así fuese, es preferible simplificar la fracción antes de aplicar el algoritmo de la adición, con el objeto de trabajar con sumandos menores.

Por ejemplo, sumar directamente las fracciones $\frac{3}{9}$ y $\frac{2}{8}$

Es decir: $\frac{3}{9}+\frac{2}{8}=\frac{3\cdot 8+2\cdot 9}{9\cdot 8}=\frac{24+18}{72}=\frac{\overset{7}{\cancel{42}}}{\underset{12}{\cancel{72}}}=\frac{7}{12}$

Al simplificar primero las fracciones dadas se obtiene el mismo resultado.

Esto es: $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}+\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 4+1\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$

Otro algoritmo que se usa para sumar fracciones, es el llamado método del "mínimo común multiplo" (M.C.M.) de los denominadores, y que corresponde a un caso particular del método general.

La ventaja de este método sobre el algoritmo general, es que también se trabaja; en algunos casos, con sumandos menores. Por ejemplo, apliquemos el algoritmo general a la adición siguiente:

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 6+5\cdot 9}{9\cdot 6}=\frac{12+45}{54}=\frac{\overset{19}{\cancel{57}}}{\underset{18}{\cancel{54}}}=\frac{19}{18}=1\frac{1}{18}$$

Ahora, desarrollamos el mismo ejemplo aplicando el M.C.M. y obtendremos idéntico resultado. Pero antes, transformamos las fracciones dadas en otras equivalentes con igual denominador.

Fracciones equivalentes a $\frac{2}{9} = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{18}, \frac{6}{27}, \frac{8}{36}, \ldots\right\}$

Fracciones equivalentes a $\frac{5}{6} = \left\{\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \ldots\right\}$

Luego: $\frac{2}{9} + \frac{5}{6} = \frac{4}{18} + \frac{15}{18} = \frac{4+15}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$

El número 18 es el mínimo común múltiplo de 9 y de 6 y en este caso, la fracción $\frac{2}{9}$ fue amplificada por 2 y $\frac{5}{6}$ por 3. Por lo tanto, el ejemplo anterior puede escribirse así:

$$\underbrace{\frac{2}{9} + \frac{5}{6}}_{\text{I}} = \frac{2\cdot 2}{9\cdot 2} + \frac{5\cdot 3}{6\cdot 3} = \frac{2\cdot 2}{18} + \frac{5\cdot 3}{18} = \frac{2\cdot 2 + 5\cdot 3}{\underbrace{18}_{\text{II}}} = \frac{4+15}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

Pero, este procedimiento es muy largo y debemos abreviarlo, llegando directamente del paso I al paso II. Sólo que para eso debemos tener previamente el M.C.M. de 9 y de 6.

Procedimiento:

Se busca el conjunto de múltiplos de 9 y el conjunto de múltiplos de 6. El menor elemento de la intersección de ambos conjuntos es el M.C.M. de 9 y de 6.

Por ejemplo:

Mùltiplos de 9 = $\{9, 18, 27, 36, 45, \ldots\} = M_1$

Mùltiplos de 6 = $\{6, 12, 18, 24, 30, 36 \ldots\} = M_2$

Luego: $M_1 \cap M_2 = \{18, 36, \ldots\}$. Entonces: M.C.M. de 9 y 6 = 18

Una vez encontrado el M.C.M. de los denominadores se plantea el desarrollo siguiente:

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{6} = \frac{2\cdot 2 + 5\cdot 3}{18} = \frac{4+15}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$$

Por 3

Por 2

En el ejemplo; se llegó del paso I al paso II en forma directa.

Apliquemos este método en un segundo ejemplo.

Sumar: $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \boxed{?}$

Procedimiento:

Múltiplos de 8 $= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\} = M_1$

Múltiplos de 6 $= \{6, 12, 18, 24, 36, 42, 48, \ldots\} = M_2$

Luego: $M_1 \cap M_2 = \{24, 48, \ldots\}$. Entonces: M.C.M. de 8 y 6 = 24

Es decir: $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 3 + 5\cdot 4}{24} = \frac{9 + 20}{24} = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$.

por 4

por 3

Aplicando el método del M.C.M. de los denominadores y el algoritmo general de la adición, realice los siguientes ejercicios:

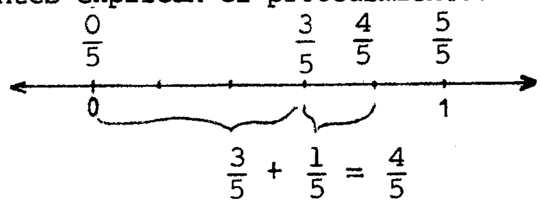
i) $\frac{4}{6} + \frac{3}{8}$; ii) $\frac{6}{10} + \frac{7}{8}$; iii) $\frac{6}{7} + \frac{4}{8}$; iv) $\frac{8}{4} + \frac{5}{10}$

c) Representación gráfica de la adición de fracciones

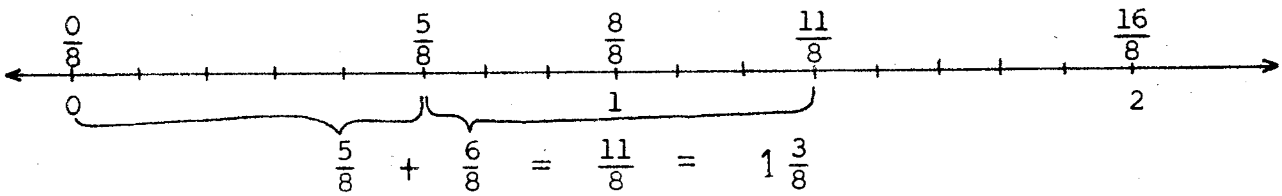
Para representar en la recta numérica la adición de fracciones es recomendable que ellas tengan igual denominador. En consecuencia, si en un ejemplo las fracciones tienen distinto denominador, deben expresarse previamente, en otras equivalentes con igual denominador.

Los ejemplos siguientes explican el procedimiento:

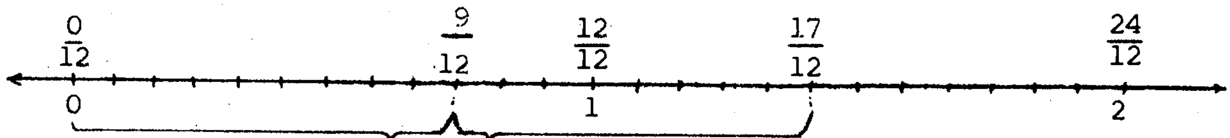
i) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 + 1}{5} = \frac{4}{5}$;



ii) $\frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{5 + 6}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$



iii) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{9 + 8}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$



$$\frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

Representar en la recta numérica las adiciones:

i) $\frac{4}{6} + \frac{3}{6} =$; ii) $\frac{6}{10} + \frac{4}{8} =$; iii) $\frac{8}{9} + \frac{5}{6} =$

d) Propiedades de la adición de fracciones (Optativo)

Las propiedades de la adición de fracciones conviene presentarlas al alumno en forma de ejercicios. Mediante el desarrollo de ejemplos el estudiante de 3º ó 4º A.B. podrá comprender la conmutatividad, la asociatividad y el elemento neutro para la adición.

I) Propiedad comutativa

i) Sumar: $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$ (*)

Ahora sumaremos las mismas fracciones, pero invirtiendo el orden de ellas, o conmutándolas.

Es decir: $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ (**)

De los resultados obtenidos en (*) y (**) se concluye que:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ii) Sumar: $\frac{5}{8} + \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 5 + 4 \cdot 8}{8 \cdot 5} = \frac{25 + 32}{40} = \frac{57}{40}$ (*)

Ahora invertimos el orden de los sumandos.

Es decir: $\frac{4}{5} + \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 8 + 5 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{32 + 25}{40} = \frac{57}{40}$ (**)

Nuevamente, de los resultados indicados por (*) y (**) se concluye que:

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{5}{8} = \frac{57}{40}$$

De estos ejemplos, y de otros que puede señalar el profesor, el alumno deduce que la adición de fracciones es conmutativa.

Es decir: el orden en que se sumen dos fracciones no cambia el resultado o suma.

Comprobar: $\frac{5}{7} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{5}{7}$

$$\downarrow$$

$$\_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\downarrow$$

II) <u>Propiedad asociativa</u>

i) Sumar: $\frac{3}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} =$

Los algoritmos deducidos anteriormente, para sumar fracciones están dados para dos sumandos y en este caso se nos pide sumar tres fracciones. ¿Qué podemos hacer para sumarlas?

Si ningún alumno sugiere un procedimiento, el profesor les dirá que se deben asociar dos fracciones por un paréntesis que las separe de la tercera y a ellas se les aplica uno de los algoritmos de la adición para obtener un resultado parcial, el cual deberá sumarse con la tercera fracción; tal como se indica en el ejemplo siguiente.

$$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \left(\frac{3}{6} + \frac{5}{6}\right) + \frac{2}{6}$$

$$= \left(\frac{3+5}{6}\right) + \frac{2}{6}$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad (*)$$

Si se asocian las dos últimas fracciones en vez de las dos primeras; ¿cuál será el resultado?

Realicemos de nuevo el ejercicio, pero ahora asociando las dos últimas.

$$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{6} + \left(\frac{5+2}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{7}{6} = \frac{3+7}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad (**)$$

De los resultados señalados por (*) y (**) se concluye que:

$$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \left(\frac{3}{6} + \frac{5}{6}\right) + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{5}{3}$$

Apliquemos la propiedad asociativa en una adición de fracciones con distintos denominadores. En este caso se aplica el método del M.C.M. de los denominadores. Por ejemplo:

ii) Sumar: $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{5 + 12}{20}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{17}{20} + \frac{1}{2} = \frac{17 + 10}{20} = \frac{27}{20} \quad (*)$$

Ahora, asociemos los dos últimos sumandos.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{6 + 5}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{11}{10} = \frac{5 + 22}{20} = \frac{27}{20} \quad (**)$$

Por los resultados obtenidos en (*) y (**), nuevamente se concluye que:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{20}$$

De los ejemplos i), ii) y de otros que los alumnos pueden desarrollar, se deduce que la adición de fracciones es asociativa.

Es decir: el orden en que se asocien dos fracciones dentro de tres o más sumandos, no cambia el resultado o suma final.

Comprobar: $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)$

Es conveniente que el alumno aplique las propiedades conmutativas y asociativas en la resolución de diverso ejercicios, para que internalice estas dos propiedades de la adición.

III) Propiedades del elemento neutro

Recordemos que la fracción $\frac{0}{1}$ es equivalente a $\frac{0}{2}$, a $\frac{0}{3}$, a $\frac{0}{4}$, etc.

porque: $\frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{0}{2} \Longleftrightarrow 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1$, $0 = 0$

Del mismo modo: $\frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{0}{3} \Longleftrightarrow 0 \cdot 3 = 0 \cdot 1$, $0 = 0$

Esta propiedad permite sumar a cualquier fracción otra de igual deniminador, pero con numerador cero. Por ejemplo:

i) Sumar: $\frac{3}{5} + \frac{0}{5} = \frac{3+0}{5} = \frac{3}{5}$

ii) Sumar: $\frac{0}{7} + \frac{4}{7} = \frac{0+4}{7} = \frac{4}{7}$

iii) Sumar: $\frac{4}{6} + \frac{0}{1} = \frac{4}{6} + \frac{0}{6} = \frac{4+0}{6} = \frac{4}{6}$

Después de estos ejemplos, preguntamos al alumno. ¿Qué le ocurre a una fracción cuando se suma otra de numerador cero?

La respuesta sería que esa fracción queda igual.

Con los tres ejemplos anteriores, el alumno concluye que; toda fracción de numerador cero es el elemento neutro de la adición de fracciones, porque al sumarse con otra fracción no la altera.

e) Ejercicios.

I. Explique cada uno de los pasos en el siguiente desarrollo:

$\left(\frac{3}{7} + \frac{5}{6}\right) + \frac{4}{7} = \frac{3}{7} + \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{7}\right)$ a) ____________________

$= \frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{5}{6}\right)$ b) ____________________

$= \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) + \frac{5}{6}$ c) ____________________

$= \frac{3+4}{7} + \frac{5}{6}$ d) ____________________

$= \frac{7}{7} + \frac{5}{6}$ e) ____________________

$= 1 + \frac{5}{6}$ f) ____________________

$= 1\frac{5}{6}$ g) ____________________

II Realizar la adición de los siguientes ejercicios:

i) $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=$; $1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=$; iii) $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+2=$; iv) $\frac{3}{4}+\frac{0}{4}=$

v) $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+\frac{5}{7}=$; vi) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{0}{8}+\frac{3}{10}\right)=$; vii) $\frac{2}{3}+4+\frac{3}{5}+\frac{4}{3}=$

III Representar en la recta numérica la suma de:

i) $\frac{5}{8}$ y $\frac{1}{8}$; ii) $\frac{4}{10}$ y $\frac{7}{10}$; iii) $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{2}$

iv) $\frac{3}{5}$ y $\frac{0}{3}$; v) $\frac{4}{6}$, $\frac{0}{5}$ y $\frac{3}{4}$; vi) $\frac{1}{4}$, 2 y $\frac{2}{8}$

9.2 SUSTRACCION DE FRACCIONES

Recordemos que en los números naturales $\mathbb{N}$, la sustracción se define como una operación inversa a la adición.

Es decir: si $4 + 3 = 7$ entonces $7 - 3 = 4$. Este resultado quiere decir que, 4 es la expresiòn màs simple del nùmero al que sumàndole 3 da 7.

Lo anterior significa también que $7>4$ y que $7>3$.

Estos mismos principios rigen para la sustracción de fracciones. Por ejemplo:

Si $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$, entonces: $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

En este ejemplo se aprecia que $\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$ y tambien que $\frac{4}{5}>\frac{1}{5}$.

De los ejemplos anteriores deducimos que, para restar fracciones debemos elegir la fracción minuendo mayor que la fracción sustraendo.

El tratamiento metodológico de la sustracción de fracciones, con material concreto, es muy similar al de la adición de fracciones.

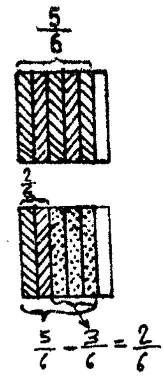
a) Sustracción con igual denominador.

Se plantea un ejemplo sencillo que pueda ser realizado con el material concreto de regiones geométricas; u otro, si el profesor así lo estima conveniente.

Por ejemplo: Restar: $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \boxed{?}$

Se coloca sobre la unidad concreta la fracción $\frac{5}{6}$. Ver diagrama.

A continuación se quitan $\frac{3}{6}$, o se invierten sobre la unidad, quedando sobre ella $\frac{2}{6}$ de color verde.

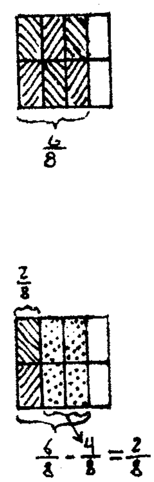


Ver diagrama.

Se plantea un segundo ejemplo, como el siguiente:

Restar $\frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \boxed{?}$

Se coloca sobre la unidad concreta la fracción $\frac{6}{8}$; ver diagrama, y a continuación se invierte, o se retira, la fracción $\frac{4}{8}$; tal como se indica en el diagrama. El resultado es $\frac{2}{8}$.



Después de varios ejemplos como los anteriores, el alumno comprende el algoritmo para la sustracción de fracciones con igual denominador.

Se plantean al alumno las siguientes preguntas:

¿Qué relación existe entre el numerador de la fracción resultante $\frac{2}{8}$ y los numeradores de las fracciones que se restan?

¿Cómo es el denominador de la nueva fracción con respecto a los denominadores anteriores?

De las respuestas del alumno se deduce el algoritmo.

Para restar una fracción de otra de igual denominador, se restan sus numeradores y se conserva el denominador común.

Ahora se aplica el algoritmo en diversos ejercicios, sin apoyo de material concreto.

Ejemplos:

i) $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$; ii) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$

iii) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$ ______ ; iv) $\frac{7}{5} - \frac{4}{5} =$ ______

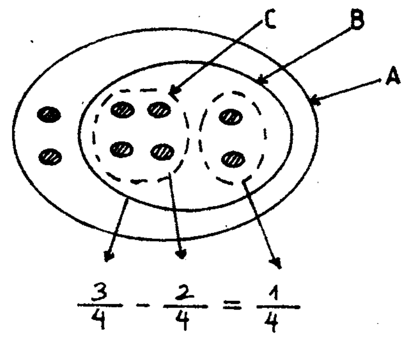
Los ejemplos anteriores, también pueden comprobarse con conjuntos discretos pequeños. Por ejemplo; porotos u otras semillas.

Para el ejemplo i) se pide al alumno que forme un conjunto A con ocho porotos, y que separe con una lana de color, un conjunto B de 6 porotos, el cual representa a la fracción $\frac{3}{4}$. Ver diagrama.

En seguida y dentro de este último conjunto B, que separe otro subconjunto C de 4 porotos con lana de distinto color a la anterior. Este último conjunto, representa a la fracción $\frac{2}{4}$. A continuación que cuente los elementos (porotos) que quedaron dentro del conjunto B.

El resultado de 2 porotos corresponde a la fracción $\frac{1}{4}$.

En forma similar se comprueban los ejemplos ii), iii) y iv).



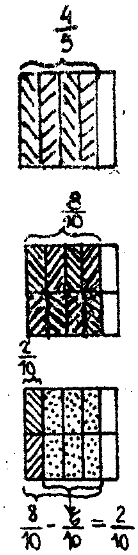
b) Sustracción con distinto denominador.

Al igual que en la adición, es recomendable iniciar este tipo de sustracción con dos fracciones, tales que, el denominador de una sea múltiplo del otro. Además, no debe olvidarse que la fracción minuendo debe ser mayor que la fracción sustraendo.

I El denominador de una fracción es múltiplo del otro.

El método consiste en amplificar la fracción de denominador menor (o simplificar la fracción de denominador mayor, si es posible) para expresarla en una fracción equivalente de igual denominador al de la otra fracción. En seguida se procede a restar fracciones con igual denominador. Por ejemplo, se plantea el ejercicio siguiente: $\frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \boxed{?}$

Haciendo uso de material concreto, se coloca sobre la unidad la fracción $\frac{4}{5}$ (color azul); ver diagramas y se explica al alumno que de ella no se puede restar $\frac{6}{10}$ porque tienen distinto denominador.



¿Qué fracción es equivalente a $\frac{4}{5}$ con denominador 10?.

El alumno debería responder que es $\frac{8}{10}$ y se comprueba colocando esta última sobre la primera. Ver diagrama.

Ahora se puede quitar de la unidad la fracción $\frac{6}{10}$; o se invierten las tarjetas, tal como se indica en el diagrama siguiente, y el resultado es $\frac{2}{10}$.

Las actividades para la sustracción anterior con regiones geométricas, sugieren el proceso teórico siguiente, donde $\frac{4}{5}$ fue amplificado. por 2.

Esto es: $\frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{6}{10} = \frac{8}{10} - \frac{6}{10} = \frac{8-6}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

En la sustracción anterior, en vez de amplificar $\frac{4}{5}$ por 2 para igualar los denominadores a 10, se puede simplificar $\frac{6}{10}$ por 2 , igualando ahora los denominadores a 5 y con ello se obtiene el mismo resultado.

Esto es: $\frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \frac{4}{5} - \frac{6:2}{10:2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$

Se sugiere aplicar estos métodos en los ejercicios siguientes:

i) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} =$; ii) $\frac{3}{4} - \frac{4}{8} =$; iii) $\frac{7}{9} - \frac{2}{3} =$

II. <u>El denominador de una fracción no es múltiplo del otro.</u>

Se recuerda al estudiante que este tipo de sustracción se resuelve siguiendo procedimientos similares a los aplicados en la adición con distintos denominadores.

Se propone un ejemplo sencillo, como el siguiente:

i) Restar: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \boxed{?}$

Se pregunta al estudiante ¿Qué debemos hacer para efectuar esta sustracción?

El alumno debiera recordar lo que se hizo para la adición con distintos denominadores y podría responder diciendo, que deben transformarse esas fracciones en otras equivalentes con iguales denominadores. Procedimiento:

Fracciones equivalentes a $\frac{3}{5} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \ldots\right\}$

Fracciones equivalentes a $\frac{1}{2} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10} \ldots\right\}$

Entonces: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

Veamos un segundo ejemplo:

ii) Restar: $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \boxed{?}$

Fracciones equivalentes a $\frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24}, \ldots\right\}$

Fracciones equivalentes a $\frac{2}{5} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}, \ldots\right\}$

Entonces: $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

En el ejemplo ii) la fracción $\frac{3}{4}$, ¿por cuánto se amplificó para transformarla en $\frac{15}{20}$?y también $\frac{2}{5}$, ¿por cuánto se amplificó para lograr $\frac{8}{20}$?

La respuesta del alumno debiera ser, que $\frac{3}{4}$ se amplificó por 5 y $\frac{2}{5}$ por 4.

Según esta respuesta, el proceso teórico es el siguiente:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} - \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{3\cdot 5 - 2\cdot 4}{4\cdot 5} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$$

El ejemplo anterior, puede abreviarse un paso, igual como se hizo en la adición.

Esto es: $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

Ahora ¿podrían ustedes enunciar el algoritmo general de la sustracción?

Algoritmo para la sustracción de fracciones

Para restar una fracción de otra mayor de distinto denominador, se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, a cuyo producto se resta la multiplicación del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera. El denominador común, es el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Aplicar el algoritmo en las sustracciones de los ejemplos siguientes:

i) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} =$; ii) $\frac{7}{6} - \frac{4}{9} =$; iii) $\frac{6}{8} - \frac{4}{9} =$; iv) $\frac{8}{5} - \frac{9}{7} =$

En la sustracción de fracciones, también se puede aplicar el método del mínimo común múltiplo de los denominadores. Por ejemplo:

i) Restar $\frac{7}{8} - \frac{4}{6} = \boxed{?}$

Procedimiento:

Múltiplos de 8 = $\{8, 16, 24, 32, \ldots\} = M_1$

Múltiplos de 6 = $\{6, 12, 18, 24, \ldots\} = M_2$

Luego: $M_1 \cap M_2 = \{24, \ldots\}$ Entonces: M.C.M. de 8 y de 6 = 24

Es decir: $\frac{7}{8} - \frac{4}{6} = \frac{7 \cdot 3 - 4 \cdot 4}{24} = \frac{21 - 16}{24} = \frac{5}{24}$

Por 4

por 3

En la medida que se practique este método se facilita el cálculo del M.C.M. de los denominadores. Además, si el nivel del curso (3° ó 4° A.E.G.B.) lo permite, el profesor puede entregar al alumno otro tipo de algoritmo para calcular el M.C.M. de los denominadores.

Aplicando el método del M.C.M. de los denominadores y el algoritmo general de la sustracción, realice los siguientes ejercicios:

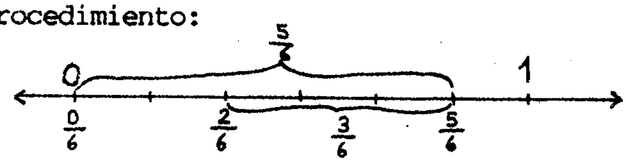
i) $\frac{4}{6} - \frac{3}{8} =$; ii) $\frac{7}{8} - \frac{6}{10} =$; iii) $\frac{8}{6} - \frac{7}{12} =$; iv) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6} =$

c) Representación gráfica de la sustracción de fracciones

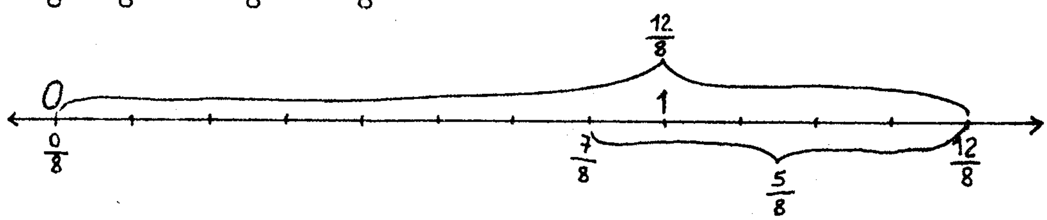
Para representar en la recta numérica la sustracción de fracciones se deben considerar las mismas sugerencias hechas para la adición. Es decir, las fracciones deben tener igual denominador.

Los ejemplos siguientes explican el procedimiento:

i) $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6}$



ii) $\frac{6}{4} - \frac{5}{8} = \frac{12}{8} - \frac{5}{8} = \frac{12-5}{8} = \frac{7}{8}$



Representar en la recta númerica las sustracciones:

i) $\frac{4}{6} - \frac{3}{6} =$; ii) $\frac{6}{10} - \frac{4}{8} =$; iii) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6} =$

d) <u>EJERCICIOS:</u>

I Realizar la sustracción de los siguientes ejercicios

i) $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} =$; ii) $\frac{6}{5} - \frac{4}{5} =$; iii) $\frac{6}{8} - \frac{1}{4} =$; iv) $2 - \frac{5}{8} =$

v) $1\frac{2}{3} - \frac{4}{3} =$; vi) $\frac{3}{5} - \frac{0}{5} =$; vii) $2\frac{1}{2} - \frac{3}{2} =$

9.3 MULTIPLICACION DE FRACCIONES

Una forma de empezar es recordando al alumno, que la multiplicación de dos números naturales se puede definir, como una suma abreviada de sumandos iguales; donde el primer factor indica las veces que debe repetirse el segundo como sumando.

Por ejemplo: $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6 \leftarrow$ (dos veces 3, ó el doble de 3)

Por otra parte: $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6 \leftarrow$ (tres veces 2, ó el triple de 2)

Luego: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \leftarrow$ (propiedad conmutativa de la multiplicación)

Otro ejemplo similar, puede ser:

Multiplicar: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \leftarrow$ (tres veces 4, ó el triple de 4)

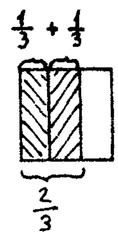
a) Multiplicación de un número natural por una fracción.

El principio de sumandos iguales se puede aplicar al producto de un número natural por una fracción. Ejemplo:

i) Multiplicar: $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ← (dos veces $\frac{1}{3}$, ó el doble de $\frac{1}{3}$)

$= \frac{1+1}{3}$ ← (adiciòn de fracciones con igual denominador)

Luego: $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$



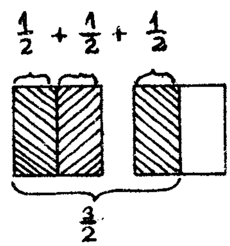
El proceso teórico anterior se puede comprobar con material concreto de regiones geométricas. Tal como se indica en el diagrama.

Un segundo ejemplo puede ser:

ii) Multiplicar: $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1+1+1}{2}$

Luego: $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$



Por ùltimo se presenta un tercer ejemplo:

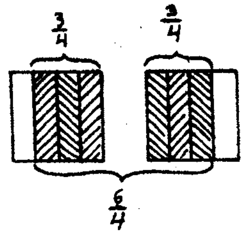
iii) Multiplicar: $\frac{3}{4} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{3}{4}$ ←(propiedad conmutativa de la multiplicaciòn)

$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ ←(dos veces $\frac{3}{4}$, ó el doble de $\frac{3}{4}$)

$= \frac{3+3}{4}$ ←(adición de fracciones con igual denominador)

Luego: $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{6}{4}$ ← $\left(\frac{3}{4} \text{ veces de } 2\right)$

La propiedad conmutativa de la multiplicación queda comprobada con el diagrama, porque decir $\frac{3}{4}$ veces de 2 unidades, es lo mismo que decir 2 veces $\frac{3}{4}$ de unidad.



Con el desarrollo de los tres ejemplos anteriores, se invita al alumno a encontrar el algoritmo que indique el proceso de multiplicar un número natural por una fracción y viceversa.

Algoritmo

Para multiplicar un número natural por una fracción, y viceversa, se multiplica el número natural por el numerador de la fracción y se mantiene el mismo denominador anterior.

Aplicar el algoritmo a los ejercicios siguientes:

i) $2 \cdot \frac{3}{4}$; ii) $\frac{4}{7} \cdot 3 =$; iii) $4 \cdot \frac{0}{3} =$; iv) $1\frac{4}{5} \cdot 6 =$

b) Multiplicación de una fracción por otra fracción

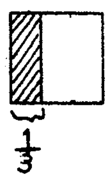
Al multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$ se tiene una expresión que debe interpretarse, como un medio de un tercio.

Es decir: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{?}$ $\longleftarrow$ (se dice, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$)

Para facilitar la comprensión del resultado, se resuelve el problema mediante uso de material concreto de regiones geométricas.

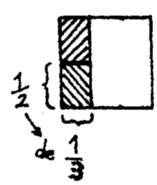
Primero, se representa $\frac{1}{3}$ sobre la unidad

Tal como se indica en el diagrama.



Se pregunta al alumno. ¿Qué hacer para obtener $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$?

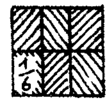
Su respuesta debiera ser: se divide $\frac{1}{3}$ por 2 y cada parte corresponde a $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$.



Se vuelve a preguntar ¿Cuántos tercios tiene la unidad?

La respuesta debiera ser 3 tercios

Entonces, insistimos. Si cada unidad tiene 3 tercios y cada tercio tiene dos medios, ¿cuántos medios tercios tiene la unidad?



La respuesta del alumno tendría que ser 6 medios tercios

Para confirmar la respuesta del alumno, se colocan sobre la unidad los 3 tercios y sobre ellos 6 sextos; tal como se muestran en el diagrama.

Continuamos explicando al alumno.

Sabemos que cada rectángulo es $\frac{1}{6}$ y a la vez representa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$; entonces ¿cuál es el resultado de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{?}$ La respuesta es obvia.

Luego: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ Según este resultado, ¿cómo se obtiene el numerador y denominador de la nueva fracción?

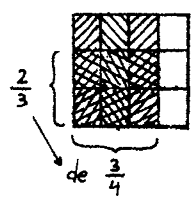
El resultado anterior sugiere el procedimiento teórico siguiente:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Veamos un segundo ejemplo:

Multiplicar: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{?}$ $\longleftarrow$ (se dice, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$)

Para encontrar la solución de este problema, podemos ayudarnos con un diagrama. Marcamos primero $\frac{3}{4}$ de la unidad y después achuramos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.



Según el diagrama. ¿En cuántas regiones congruentes se dividió el cuadrado unidad?

La respuesta será: en 12 regiones congruentes.

Volvemos a preguntar; ¿Qué nombre recibe cada región?

La respuesta debiera ser; un doce avo $\left(\frac{1}{12}\right)$

Insistimos con otra pregunta: ¿Cuántas regiones están doblemente achuradas en la unidad?

Ahora la respuesta debiera ser: sólo 6 regiones

Entonces ¿Tú puedes darme el resultado de $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{?}$

¡Correcto! es $\frac{6}{12}$.

Luego: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Por último, ¿podemos deducir un algoritmo general para la multiplicación de fracciones?.

Recordemos, que en este caso, no importa si los denominadores de las fracciones son iguales o distintos.

Algoritmo general

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores entre si, colocando el producto de los numeradores, como numerador de la nueva fracción, y como denominador de ella, el producto de los denominadores.

Apliquemos el algoritmo a los ejemplos siguientes:

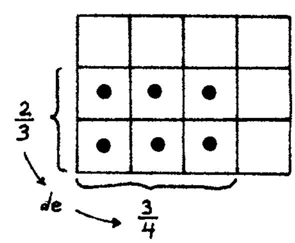
i) $\frac{3}{4} \cdot \frac{\square}{5} = \frac{18}{\square}$; ii) $\frac{2}{5} \cdot \frac{\square}{3} = \frac{2}{5}$; iii) $\frac{\square}{8} \cdot \frac{5}{\square} = \frac{1}{1}$

iv) $\frac{5}{\square} \cdot \frac{3}{7} = \frac{\square}{28}$; v) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \_\_$; vi) $\frac{5}{8} \cdot 3\frac{8}{5} = \_\_$

Es recomendable usar diversos diagramas como recursos para enseñar la multiplicación de fracciones, con el propósito que al niño le quede claro el procedimiento y el concepto de multiplicación.

Un gráfico diferente para representar $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ es el siguiente.

En el dibujo se observan 6 cuadros con una pinta en el centro, de los 12 cuadros que existen en él. Por lo tanto, cada cuadro representa a $\frac{1}{12}$



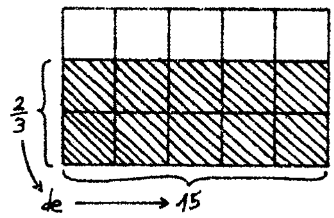
Luego: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Este tipo de diagrama es útil para resolver problemas, como el siguiente.

¿Cuánto es $\frac{2}{3}$ de 15?

Para resolver este problema, el alumno dibuja un rectángulo con 15 regiones congruentes. Ver figura; y luego separa o achura $\frac{2}{3}$ del rectángulo.

La respuesta al problema la encontrará al contar las regiones achuradas.



Luego: $\frac{2}{3}$ de 15 es equivalente a decir:

$\frac{2}{3} \cdot 15 = \frac{2 \cdot 15}{3} = \frac{30}{3} = 10$ cuadros achurados

c) <u>Propiedades de la multiplicación de fracciones.</u>

(Optativo)

Al igual que en la adición, las propiedades de la multiplicación se recomienda presentarlas al alumno en forma de ejercicios, para que a través de ellos comprenda el significado de dichas propiedades.

I) <u>Propiedad conmutativa.</u>

i) Multiplicar: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (*)

Ahora multiplicamos las mismas fracciones, pero invertimos el orden de ellas. Dicho de otra manera, conmutándolas.

Es decir: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (**)

De los resultados obtenidos en (*) y (**) se concluye que:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Veamos un segundo ejemplo.

ii) Multiplicar: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ (*)

Ahora invertimos el orden de los factores.

Esto es: $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ (**)

Nuevamente, de los resultados obtenidos en (*) y (**) se concluye que:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

De los ejemplos anteriores, y de otros que pueda indicar y resolver el alumno, se deduce que la multiplicación es conmutativa.

Es decir; El orden en que se multipliquen dos fracciones, no cambia el resultado o producto.

Comprobar: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$

$$\underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\quad}$$

II) <u>Propiedad asociativa</u>

i) Multiplicar: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

El algoritmo de la multiplicación de fracciones, también fue definido para el producto de dos factores y en este caso tenemos tres. ¿Qué podemos hacer para multiplicar las tres fracciones?.

El alumno, seguramente, recordará la asociatividad de la adición de naturales y responderá diciendo, que se deben asociar con un paréntesis dos fracciones y multiplicarlas, para posteriormente, multiplicar dicho resultado con la tercera fracción.

Es decir:
$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8 \cdot 1}{15 \cdot 2} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \quad (\ast)\end{aligned}$$

Ahora repitamos el mismo ejercicio, pero asociamos las dos últimas fracciones.

Esto es:
$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 10} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \quad (\ast\ast)\end{aligned}$$

De los resultados obtenidos, y que están indicados por $(\ast)$ y $(\ast\ast)$ se concluye que:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{15}$$

Un segundo ejemplo de este tipo puede ser:

ii) Multiplicar: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3}$

$$= \left(\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 5}\right) \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12 \cdot 2}{35 \cdot 3} = \frac{24}{105} = \frac{8}{35} \quad (*)$$

Repitamos el ejercicio, pero ahora asociamos las dos últimas fracciones.

Es decir: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)$

$$= \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3}\right)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{15} = \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 15} = \frac{24}{105} = \frac{8}{35} \quad (**)$$

Nuevamente, podemos comprobar con los resultados obtenidos en $(*)$ y $(**)$, que se cumple la asociatividad de la multiplicación.

Esto es: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{35}$

Con la comprobación de los dos ejemplos anteriores, el alumno deduce que la multiplicación de fracciones es asociativa.

Es decir: el orden en que se asocien dos fracciones dentro de tres, o más factores, no cambia el resultado o producto final.

Comprobar:

i) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}\right)$

ii) $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}\right)$

III <u>Propiedad del elemento neutro</u>

Recordemos que: $1 \leftrightarrow \frac{1}{1} \leftrightarrow \frac{2}{2} \leftrightarrow \frac{3}{3} \leftrightarrow \frac{4}{4} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \frac{n}{n}$

porque: $\frac{1}{1} \leftrightarrow \frac{2}{2} \Longleftrightarrow \underset{2}{\underset{\downarrow}{2 \cdot 1}} = \underset{2}{\underset{\downarrow}{1 \cdot 2}}$

y también: $\frac{2}{2} \leftrightarrow \frac{3}{3} \Longleftrightarrow \underset{6}{\underset{\downarrow}{3 \cdot 2}} = \underset{6}{\underset{\downarrow}{2 \cdot 3}}$

Apliquemos esta propiedad en los siguientes ejercicios.

(se simplifica por 4)

Multiplicar: $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{20}_{\,5}} = \frac{3}{5}$

Este mismo resultado se obtendría si multiplicamos:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

También se llegaría al mismo resultado al multiplicar:

$$\frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3 \cdot 1}{5} = \frac{3}{5}$$

Veamos un segundo ejemplo:

(se simplifica por 6)

Multiplicar: $\frac{6}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 7} = \frac{\cancel{24}^{\,4}}{\cancel{42}_{\,7}} = \frac{4}{7}$

También se obtiene el mismo resultado al multiplicar

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 7} = \frac{4}{7}$$

Después de estos ejemplos preguntamos al alumno ¿Qué le ocurre a una fracción que se multiplica por $\frac{1}{1}$, o por otra equivalente a ella; por ejemplo: por $\frac{2}{2}$, por $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, etc.?

El alumno tendría que concluir que la fracción dada no se altera y por lo tanto se puede decir que: la fracción $\frac{1}{1}$, y toda otra fracción equivalente a ella, es elemento neutro de la multiplicación de fracciones.

Aplicar la propiedad del elemento neutro a los siguientes ejercicios:

i) $\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{\square} = \frac{5}{4}$, ii) $\frac{\square}{8} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{2}$, iii) $\frac{\square}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{\square}{\square}$

IV Propiedad de los inversos multiplicativos.

Invitamos al alumno a resolver los siguientes ejercicios:

i) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = \frac{1}{1}$; ii) $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{21}{21} = \frac{1}{1}$

iii) $\frac{6}{4} \cdot \frac{4}{6} = \_\_\_\_$; iv) $\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{8} = \_\_\_\_$

Pedimos al alumno que observe estos ejemplos y preguntamos. ¿Cómo están escritas las fracciones que se multiplican en estos cuatro ejemplos y cuales son los resultados?

El alumno debería responder que las fracciones están invertidas en todos los ejemplos y que el resultado es $\frac{1}{1}$, o una fracción que tiene igual numerador y denominador.

Por ejemplo, en el primer ejercicio $\frac{3}{5}$ se multiplica por $\frac{5}{3}$. Esto significa que $\frac{5}{3}$ es la fracción inversa o recíproca de $\frac{3}{5}$.

De igual manera, en el segundo ejemplo $\frac{3}{7}$ es la fracción inversa o recíproca de $\frac{7}{3}$. En el tercero, $\frac{4}{6}$ es la inversa de $\frac{6}{4}$ y por último, en el ejemplo $\frac{5}{8}$ es la inversa de $\frac{8}{5}$.

De estos ejemplos se puede concluir que:

En todo producto de dos fracciones que resulte $\frac{1}{1}$, o su fracción equivalente; cada fracción es inversa multiplicativa una de la otra.

Por ejemplo:

La inversa multiplicativa de $\frac{4}{9}$ es $\frac{9}{4}$ porque

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{4 \cdot 9}{9 \cdot 4} = \frac{36}{36} = \frac{1}{1}$$

Pero también, la inversa multiplicativa de $\frac{9}{4}$ es $\frac{4}{9}$, porque:

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{9 \cdot 4}{4 \cdot 9} = \frac{36}{36} = \frac{1}{1}$$

Del mismo modo, la inversa multiplicativa de $\frac{1}{5}$ es $\frac{5}{1}$ o simplemente 5, porque:

$\frac{1}{5} \cdot 5 \quad \frac{1 \cdot 5}{5} = \frac{5}{5} = \frac{1}{1}$

A su vez, la inversa multiplicativa de 3 es $\frac{1}{3}$, porque

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1}$$

De estos dos últimos ejemplos se puede concluir que:

La inversa multiplicativa de todo número natural es una fracción, cuyo numerador es 1 y el dnominador es el mismo número.

Ejemplo: $\frac{1}{4}$ es la inversa multiplicativa de 4 .

El 4 es inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$ porque

$$4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1}$$

Del mismo modo, $\frac{1}{1}$ es inverso de si mismo, y no existe otra fracción que cumpla esta propiedad, ya que: $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$

Apliquemos la propiedad de los inversos en los ejemplos siguientes:

i) $\frac{3}{5} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{1}{1}$; ii) $\frac{\square}{7} \cdot \frac{\square}{5} = \frac{1}{1}$; iii) $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{1}$

iv) $7 \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{1}{1}$; v) $\frac{1}{5} \cdot \square = \frac{1}{1}$; vi) $\frac{6}{\square} \cdot \frac{3}{\square} = \frac{1}{1}$

V) <u>Propiedad del elemento nulo, o propiedad del cero.</u>

Preguntamos al alumno. ¿Cuál será la fracción inversa de $\frac{0}{1}$?

Seguramente, el alumno estará tentado en decir que es $\frac{1}{0}$.

Pero, le comprobamos que: $\frac{0}{1} \cdot \frac{1}{0} = \frac{0 \cdot 1}{1 \cdot 0} = \frac{0}{0} \neq \frac{1}{1}$ y se convenserá que $\frac{0}{1}$ no tiene inversa.

Ahora le presentamos a la fracción $\frac{0}{5}$.

¿Cuál es su inversa?

Si el alumno recuerda que $\frac{0}{1} \leftrightarrow \frac{0}{5}$, tendría que decir que esa fracción tampoco tiene inversa; porque: $\frac{0}{5} \cdot \frac{5}{0} = \frac{0 \cdot 5}{5 \cdot 0} = \frac{0}{0} \neq \frac{1}{1}$

De estos ejemplos se puede concluir que: toda fracción de numerador cero no tiene fracción inversa y es la única fracción que tiene esa propiedad.

Recordemos que la fracción $\frac{0}{1}$ ¿qué papel, o función, desempeñaba en la adición de fracciones? ¡Correcto!, es el elemento neutro de la adición, ya que al sumarse con cualquier fracción no altera a esta última.

Por ejemplo: $\frac{3}{4} + \frac{0}{1} = \frac{3}{4} + \frac{0}{4} = \frac{3+0}{4} = \frac{3}{4}$

Veamos ahora lo que ocurre al multiplicar $\frac{0}{1}$ por $\frac{3}{4}$. Es decir: $\frac{3}{4} \cdot \frac{0}{1} = \frac{3 \cdot 0}{4 \cdot 1} = \frac{0}{4} = \frac{0}{1}$

En este ejemplo se aprecia que $\frac{3}{4}$ se anulo o desapareció, y quedó sólamente $\frac{0}{1}$.

Comprobemos con otro ejemplo:

$\frac{0}{4} \cdot \frac{5}{9} = \frac{0 \cdot 5}{4 \cdot 9} = \frac{0}{36} = \frac{0}{4}$

Nuevamente $\frac{5}{9}$ se anuló, por tanto podemos concluir que:

La fracción $\frac{0}{1}$, o su equivalente; al multiplicarse con cualquiera otra fracción, anula a esta última, y es por este motivo que a $\frac{0}{1}$ se le llama elemento nulo de la multiplicación.

Aplicar la propiedad del elemento nulo a los ejercicios siguientes:

i) $\frac{3}{5} \cdot \frac{\square}{2} = \frac{0}{1}$; ii) $\frac{4}{7} \cdot \frac{0}{\square} = \frac{0}{1}$; iii) $\frac{\square}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{0}{\square}$

iv) $\frac{0}{4} \cdot \frac{3}{5} =$; v) $\frac{4}{7} \cdot \frac{0}{7} =$; vi) vii) $\frac{9}{7} \cdot \frac{0}{8} =$

VI <u>Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.</u>

Presentamos al alumno el ejercicio siguiente;

i) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}$ y le pedimos que lo resuelva. Pero antes le explicamos que; en todo ejercicio donde exista una operación con dos números asociados por un paréntesis, se debe resolver primero la operación del paréntesis.

Luego: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{1+2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ (*)

Ahora le presentamos la otra parte del problema:
Esto es:

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{12}+\frac{6}{12}=\frac{3+6}{12}=\frac{9}{12} \quad (**)$$

¿Cómo son los resultados obtenidos en ambos ejercicios?

Si el resutado es el mismo quiere decir que el primer ejemplo planteado es igual al segundo.

Es decir: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{12}$

Veamos un segundo ejemplo para que lo resuelva el alumno.

ii) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{3\cdot 5}\right)=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{10+12}{15}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{22}{15}=\frac{66}{75}$ (*)

Igual que en el caso anterior, presentamos la segunda parte del problema:

Esto es: $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{15}+\frac{12}{25}=\frac{6\cdot 5+12\cdot 3}{75}=\frac{30+36}{75}=\frac{66}{75}$ (**)

Nuevamente preguntamos. ¿Cómo son los resultados obtenidos en (*) y (**) ?

Si los resultados son iguales quiere decir que:

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\right)$$

Explicamos al alumno que los dos ejemplos de ejercicios resueltos anteriormente, expresan la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición. El primero por derecha y el segundo por izquierda.

Comprobar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3+5\cdot 2}{4}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{12}+\frac{5}{6}$$

$$\left(\frac{3+10}{4}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{3+5\cdot 2}{12}$$

$$\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3+10}{12}$$

$$\frac{13}{12} = \frac{13}{12}$$

EJERCICIOS:

I) Compruebe la igualdad : $\left(1\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{3}{2} = \left(1\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)$

II) Escriba el otro miembro y compruebe la distributividad por izquierda de los ejercicios i) y ii).

i) $\frac{2}{5}\cdot\left(3\frac{2}{5}+\frac{7}{3}\right)=$; ii) $1\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{6}{7}+2\frac{3}{5}\right)=$

III) Escriba el otro miembro y compruebe la distributividad por derecha de los ejercicios iii) y iv)

iii) $\left(2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{10}\right)=$; iv) $\left(\frac{2}{3}\cdot 1\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}\cdot 1\frac{3}{4}\right)=$

9.4 DIVISION DE FRACCIONES.

Recordemos que en el conjunto de los números naturales, la división se considera como un problema inverso a la multiplicación.

Por ejemplo: $4 \cdot 5 = 20$, entoncés $20 : 5 = 4$ pero también, si $20 : 5 = 4$, (✱) entonces $20 = 4 \cdot 5$

En el conjunto de las fracciones, en cambio, la división es una operación inversa a la multiplicación. Pero, en este caso, al dividir dos fracciones se desconoce el resultado, o la fracción cuociente. Por ejemplo:

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{?}{?}$$

Supongamos que la fracción cuociente sea $\frac{p}{q}$, y apliquemos el modelo de la división en los naturales que está señalada con (✱)

Luego: si $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{p}{q}$ (△), entonces

Para encontrar el valor de $\frac{p}{q}$ se multiplica la segunda igualdad por el inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$. Tal como se muestra en el desarrollo del frente.

$$\frac{5}{4} = \frac{p}{q} \cdot \frac{3}{2} \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{p}{q} \cdot \frac{6}{6}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{p}{q} \qquad (△)(△)$$

$$\frac{10}{12} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{p}{q}$$

Si comparamos las expresiones señaladas en (△) y (△)(△) se concluye que:

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \qquad (✱✱)$$

Para estar seguro que $\frac{5}{6}$ es la fracción resultante de la división se comprueba, reemplazando $\frac{p}{q}$ por dicho valor en la segunda igualdad, señalada con (△)

Luego: $\frac{5}{4} = \frac{p}{q} \cdot \frac{3}{2}$

Entonces: $\frac{5}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$

$\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$ Esta igualdad nos indica que la fracción $\frac{5}{6}$ es el cuociente de $\frac{5}{4} : \frac{3}{2}$.

Según el resultado obtenido en (✱✱) se concluye el siguiente algoritmo para la división.

Para dividir una fracción por otra se multiplica la primera fracción por la fraccción inversa multiplicativa de la segunda.

Esto es: $\frac{4}{5} : \frac{6}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

Aplicar el algoritmo en las divisiones siguientes:

i) $\frac{4}{7} : \frac{3}{2} =$; ii) $\frac{3}{5} : \frac{\square}{4} = \frac{6}{5}$; iii) $\frac{2}{11} : \frac{3}{\square} = \frac{10}{33}$

Es bueno recordar que en la división de fracciones, el material concreto de regiones geométricas es poco apropiado. No facilita la comprensión del concepto, como ocurre en las otras operaciones de fracciones.

EJERCICIOS:

Desarrollar los siguientes ejercicios:

I De Adiciones.

i) $\frac{3}{5} + \frac{5}{5} =$; ii) $\frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{5}{5} =$; iii) $\frac{7}{4} + \frac{3}{4} + 2 =$

iv) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)+\ 1\frac{6}{4}=$; v) $\frac{3}{4}+\left(3\frac{2}{3}+2\frac{5}{4}\right)=$

v) $\frac{4}{3}+\ 1\frac{5}{6}+2=$, vii) $\frac{3}{2}+2\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{0}{6}=$

II <u>De sustracciones y adiciones</u>

i) $\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=$; ii) $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$; iii) $\frac{8}{4}+\frac{5}{4}-2=$

vi) $\frac{0}{4}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=$; v) $2\frac{1}{3}-\left(\frac{6}{9}-\frac{4}{7}\right)=$

vi) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{3}=$; vii) $4\frac{3}{5}-2\frac{4}{5}+\frac{0}{5}=$

III <u>De multiplicaciones y adiciones.</u>

i) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=$; ii) $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=$; iii) $\frac{7}{11}\cdot\frac{0}{3}=$

iv) $4\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=$; v) $1\frac{3}{4}\cdot 3\frac{2}{5}=$; vi) $\frac{3}{6}\cdot 5\frac{2}{3}=$

vii) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{2}{3}=$; viii) $2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{4}\right)=$

ix) $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\cdot 2\frac{3}{4}=$; x) $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\right)=$

IV <u>De Divisiones y Multiplicaciones.</u>

i) $\frac{5}{4}:\frac{2}{3}=$; ii) $\frac{3}{7}:\frac{4}{3}=$; iii) $1\frac{2}{5}:\frac{4}{5}=$

iv) $3\frac{4}{5}:1\frac{3}{2}=$; v) $\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{3}:\frac{5}{3}\right)=$; vi) $\left(2\frac{1}{2}:\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{4}=$

vii) $\left(\frac{3}{5}:\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}:\frac{3}{3}\right)=$; viii) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\right):\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)=$

10 BIBLIOGRAFIA

- FRANCISCA DE ESCALONA Y MANUEL NORIEGA
  Didáctica de la Matemática en la Escuela Primaria 2.
  Edit. Kapelusz. Buenos Aires 1975.

- TEODORO JARUFE A., LUDOVISA LILLO T. y RODRIGO DE LAS HERAS
  Matemática 4° y 5° Año
  Edit. Santillana. Santiago 1990.

- JOHN A. PETERSON y JOSEPH HASHISAKI
  Teoría de la Aritmética
  Edit. Limusa, Wiley S.A. México.

- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
  Matemática Moderna para Profesores de enseñanza elemental
  Aula XXI. Santillana 1979.

- MARTA RIVEROS R. y PIERINA ZANOCCOS S.
  Como aprenden Matemáticas los niños
  Edit. Nueva Universidad. Teleduc.